Soit E un espace métrique.
Soit A une partie dense de E telle que toute suite de Cauchy de A converge.

Montrer que E est complet.

Analyse

Dans cet exercice, l'hypothèse de densité est déterminante ! On va se donner, classiquement, une suite de Cauchy d'éléments de E. Chacun de ces éléments est « proche » (cette proximité est à préciser) d'un élément de A. Ainsi, on va construire une suite de Cauchy d'éléments de A associée à la suite de Cauchy d'éléments de E. On tire alors parti de la deuxième hypothèse sur A …

Résolution

Nous notons d la distance de l'espace métrique E.

Soit (x_n) une suite de Cauchy de E.

Comme A est dense dans E, pour tout n entier naturel non nul, la boule ouverte $\mathscr{B}\left(x_n, \frac{1}{n}\right)$ rencontre A : $\mathscr{B}\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$. Soit alors $a_n \in \mathscr{B}\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap \mathrm{A}$.

On a ainsi construit une suite (a_n) d'éléments de A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$.
Ainsi, si on montre que la suite (a_n) converge, il en ira de même pour la suite (x_n) et leurs limites seront égales.

Pour établir la convergence de la suite (a_n), il suffit de montrer qu'il s'agit d'une suite de Cauchy.

Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on a :

$$d(a_p, a_q) \leq d(a_p, x_p) + d(x_p, x_q) + d(x_q, a_q) < \frac{1}{p} + d(x_p, x_q) + \frac{1}{q}$$

Soit alors ε un réel strictement positif.

La suite (x_n) étant une suite de Cauchy de E, il existe un entier naturel N_1 tel que :

$$(p \geq N_1 \text{ et } q \geq N_1) \Rightarrow d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ étant convergente de limite nulle, il existe un entier N_2 tel que :

$$n \geq N_2 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$$

Soit alors $N = \max(N_1, N_2)$. On a :

$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow \frac{1}{p} + d(x_p, x_q) + \frac{1}{q} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

D'où :

$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow d(a_p, a_q) < \varepsilon$$

Ainsi, la suite (a_n) est bien une suite de Cauchy.

D'après la seconde hypothèse de l'énoncé, elle est donc convergente : $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$.

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, d(x_n, a_n) < \frac{1}{n}$, on en déduit immédiatement que la suite (x_n) est également convergent et admet également a pour limite.

Ainsi, toute suite de Cauchy de E est convergente. E est un espace complet.

Résultat final

Un espace métrique admettant une partie dense
où toute suite de Cauchy converge est complet.