

Soit M une matrice réelle orthogonale.

Montrer que les valeurs propres complexes de M sont de module égal à 1.

Analyse

On peut s'inspirer de la démonstration classique relative à la diagonalisabilité des matrices réelles symétriques.

Résolution

La matrice M est une matrice réelle orthogonale d'ordre n . Ses éléments sont donc réels et on a : $M^{-1} = {}^t M$.

Soit λ une valeur propre complexe de M .

Il existe un vecteur propre (complexe) X non nul tel que : $M X = \lambda X$.

En considérant la conjugaison et en tenant compte du fait que M est une matrice réelle ($\bar{M} = M$), il vient :

$$M X = \lambda X \Leftrightarrow \overline{M X} = \overline{\lambda X} \Leftrightarrow \bar{M} \bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X} \Leftrightarrow M \bar{X} = \bar{\lambda} \bar{X} \Leftrightarrow \bar{X} = M^{-1} \bar{\lambda} \bar{X} \Leftrightarrow \boxed{\bar{X} = \bar{\lambda} {}^t M \bar{X}}$$

En considérant cette fois la transposition, on a :

$$M X = \lambda X \Leftrightarrow {}^t (M X) = {}^t (\lambda X) \Leftrightarrow {}^t X {}^t M = \lambda {}^t X \Leftrightarrow {}^t X M^{-1} = \lambda {}^t X \Leftrightarrow \boxed{{}^t X = \lambda {}^t X M}$$

Les deux résultats (encadrés) ci-dessus nous permettent d'écrire :

$${}^t X \bar{X} = (\lambda {}^t X M) (\bar{\lambda} {}^t M \bar{X}) = \lambda \bar{\lambda} ({}^t X M {}^t M \bar{X}) = |\lambda|^2 ({}^t X \bar{X})$$

Posons : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On a alors :

$${}^t \mathbf{X} \bar{\mathbf{X}} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Comme $\mathbf{X} \neq 0$, on a : $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = {}^t \mathbf{X} \bar{\mathbf{X}} \neq 0$.

Il vient alors : ${}^t \mathbf{X} \bar{\mathbf{X}} = |\lambda|^2 ({}^t \mathbf{X} \bar{\mathbf{X}}) \Leftrightarrow |\lambda|^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$.

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

Les valeurs propres complexes d'une matrice réelle orthogonale ont pour module 1.