

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Quels sont les endomorphismes de E autoadjoints et orthogonaux ?

Analyse

Une question très proche du cours. On commence par traduire simplement les deux conditions au niveau de l'adjoint.

Résolution

Soit f un endomorphisme de E , autoadjoint et orthogonal.

Comme f est autoadjoint, on a : $f^* = f$.

Comme f est orthogonal, on a : $f^* = f^{-1}$.

On en déduit : $f = f^{-1}$, soit $f \circ f = \text{Id}_E$.

L'endomorphisme f est donc une symétrie vectorielle. Puisqu'il est autoadjoint, il s'agit donc d'une symétrie orthogonale.

Réciproquement une symétrie orthogonale d'un espace vectoriel euclidien est bien ... orthogonale et autoadjointe !

Résultat final

Les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien sont les symétries orthogonales de cet espace.