Soit f la fonction $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\max(0\,;\sin x)$$

Déterminer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

Analyse

Une application directe du cours sans difficulté majeure.

Résolution

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\max(0\,;\sin x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\max(0\,;\sin x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\max(0\,;\sin x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\times 0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\sin x\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\sin x\,dx
\end{aligned}$$

En utilisant la relation : $\cos a\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\sin x\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\sin\left((n+1)x\right)-\sin\left((n-1)x\right)\right]dx
\end{aligned}$$

Pour $n=1$, on a :

$$a_1=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(2x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}=0$$

Pour $n>1$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\sin x\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin((n+1)x)-\sin((n-1)x)\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)x)+\frac{1}{n-1}\cos((n-1)x)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos((n+1)\pi)+\frac{1}{n-1}\cos((n-1)\pi)+\frac{1}{n+1}\cos 0-\frac{1}{n-1}\cos 0\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}+\frac{1}{n-1}(-1)^{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

On doit donc ici distinguer suivant la parité de n :

- Si n est pair ($n=2k$) alors :

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2k+1}(-1)^{2k+1}+\frac{1}{2k-1}(-1)^{2k-1}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \frac{-2}{\pi(4k^2-1)}
\end{aligned}$$

  On a, en particulier : $a_0=\dfrac{2}{\pi}$.

- Si n est impair ($n=2k+1$) alors :

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2k+1}(-1)^{2k+1+1}+\frac{1}{2k-1}(-1)^{2k+1-1}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\cancel{-\frac{1}{2k+1}}+\cancel{\frac{1}{2k-1}}+\cancel{\frac{1}{2k+1}}-\cancel{\frac{1}{2k-1}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a cette fois :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\max(0\,;\sin x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\sin x\,dx
\end{aligned}$$

En utilisant la relation : $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$, on obtient :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x)\right]dx \end{aligned}$$

Pour $n=1$, on a :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[1-\cos(2x)\right]dx = \frac{1}{2\pi}\left[x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin(2\pi)-0+\sin(2\times 0)\right) = \frac{\pi}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pour $n>1$, on a :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x)\right]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n-1}\sin((n-1)x)-\frac{1}{n+1}\sin((n+1)x)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Comme, pour tout entier *p* on a : $\sin(p\pi)=\sin 0=0$, il vient : $b_n=0$.

Finalement, la série de Fourier de *f* est définie par :

$$(S(f))(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2}{\pi\left(4k^2-1\right)}\cos(2kx)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

Résultat final

La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$, 2π – périodique et définie par : $f(x)=\max(0\,;\sin x)$ admet pour coefficients de Fourier trigonométriques :

$$a_{2k}=\frac{-2}{\pi\left(4k^2-1\right)},\ a_{2k+1}=0,\ b_1=\frac{1}{2} \text{ et, pour } n>1 : b_n=0$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives des restrictions à l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ de la fonction f et des trois sommes partielles $S_1(f)$ (en pointillés noirs), $S_2(f)$ (en pointillés bleus) et $S_3(f)$ (en pointillés verts).