

Soit f la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $[-\pi; \pi[$ par :

$$f(x) = e^x$$

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction f .

2. En déduire les sommes : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Analyse

Une situation classique pour s'entraîner. L'expression de la fonction sur l'intervalle $[-\pi; \pi[$ conduit à calculer les coefficients de Fourier complexes. Pour ce qui est du calcul des sommes, on prendra garde au fait que la fonction n'est pas continue.

Résolution

La fonction f est 2π -périodique et continue par morceaux (discontinuité pour $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$), elle est même de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

Question 1.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-i)n t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-in} e^{(1-in)t} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+ni}{1+n^2} (e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1+ni}{1+n^2} \left[e^{\pi} (\cos(n\pi) - i \sin(n\pi)) - e^{-\pi} (\cos(n\pi) + i \sin(n\pi)) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1+ni}{1+n^2} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \cos(n\pi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1+ni}{1+n^2} 2 \sinh(\pi) \times (-1)^n \\ &= \frac{(-1)^n \sinh(\pi)(1+ni)}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

Il vient alors, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ &= \frac{(-1)^n \sinh(\pi)(1+ni)}{\pi(1+n^2)} + \frac{(-1)^{-n} \sinh(\pi)(1-ni)}{\pi(1+n^2)} \\ &= 2 \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

Et, pour tout entier naturel n , non nul :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= i [c_n(f) - c_{-n}(f)] \\ &= i \left[\frac{(-1)^n \sinh(\pi)(1+ni)}{\pi(1+n^2)} - \frac{(-1)^{-n} \sinh(\pi)(1-ni)}{\pi(1+n^2)} \right] \\ &= i \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} [(1+ni) - (1-ni)] \\ &= i \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} 2in \\ &= - \frac{2n(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \\ &= \frac{2n(-1)^{n+1} \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \\ &= -na_n(f) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x réel, la série de Fourier $S(f)$ associée à la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} S(f) &= a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)] \\ &= a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n(f) \cos(nx) - na_n(f) \sin(nx)] \\ &= a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) [\cos(nx) - n \sin(nx)] \end{aligned}$$

D'après le calcul ci-dessus, on a :

$$a_0(f) = 2 \frac{(-1)^0 \sinh(\pi)}{\pi(1+0^2)} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

Alors :

$$S(f) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} [\cos(nx) - n \sin(nx)]$$

$$S(f) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} [\cos(nx) - n \sin(nx)]$$

Question 2.

La fonction f n'est pas continue sur \mathbb{R} mais elle est \mathcal{C}^1 par morceaux. Sa série de Fourier est donc égale à sa régularisée f_r :

$$S(f) = f_r(x) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} [\cos(nx) - n \sin(nx)]$$

En particulier, pour $x=0$, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} f_r(0) &= f(0) = e^0 = 1 = S(f)(0) \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} [\cos(n \times 0) - n \sin(n \times 0)] \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times S' \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times S' &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times S' &= 1 - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \\ \Leftrightarrow S' &= \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(1 - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \right) \\ \Leftrightarrow S' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh(\pi)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Pour $x=\pi$, on a : $f_r(\pi) = \frac{1}{2}(e^\pi + e^{-\pi}) = \cosh(\pi)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}f_r(\pi) &= \cosh(\pi) = S(f)(\pi) \\&= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} [\cos(n \times \pi) - n \sin(n \times \pi)] \\&= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \times (-1)^n \\&= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times S\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}\frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times S &= \cosh(\pi) \\ \Leftrightarrow \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \times S &= \cosh(\pi) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \\ \Leftrightarrow S &= \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} \left(\cosh(\pi) - \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \right) \\ \Leftrightarrow S &= \frac{1}{2} \left(\pi \frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow S &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1 \right)\end{aligned}$$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\tanh(\pi)} - 1 \right) \text{ et } S' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sinh(\pi)} - 1 \right)$$