1. Existe-t-il une fonction f continue et $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ dont les coefficients de Fourier trigonométriques valent : $a_n(f)=\dfrac{1}{2^n}$ et $b_n(f)=0$?

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5-4\cos t}$.

Analyse

Une étude de série trigonométrique simple qui aboutit à un joli calcul d'intégrale !

Résolution

Question 1.

D'après l'énoncé, on s'intéresse à la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2}+\sum\frac{\cos(nx)}{2^n}=\frac{1}{2}+\sum\left(\frac{1}{2^{n+1}}e^{inx}+\frac{1}{2^{n+1}}e^{-inx}\right)$$

La série numérique $\sum\frac{1}{2^{n+1}}$ étant convergente (série géométrique de raison $\frac{1}{2}\in\left]-1\,;1\right[$), cette série de fonctions converge normalement vers une fonction f continue et $2\pi-$périodique dont cette série est la série de Fourier.

On a donc :

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}e^{inx}+\frac{1}{2^{n+1}}e^{-inx}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}e^{inx}+\frac{1}{2^n}e^{-inx}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n+\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n+\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^n\right)-1$$

Les séries géométriques $\sum\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n$ et $\sum\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^n$ sont convergente puisque leurs raisons sont de module $\left|\frac{e^{ix}}{2}\right|=\left|\frac{e^{-ix}}{2}\right|=\frac{1}{2}$ strictement inférieur à 1.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n+\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^n\right)-1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2}}+\frac{1}{1-\frac{e^{-ix}}{2}}\right)\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2-e^{ix}}+\frac{1}{2-e^{-ix}}=-\frac{1}{2}+\frac{2-e^{-ix}+2-e^{ix}}{\left(2-e^{ix}\right)\left(2-e^{-ix}\right)}\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{4-e^{-ix}-e^{ix}}{4-2e^{-ix}-2e^{ix}+1}=-\frac{1}{2}+\frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}\\
&= \frac{-5+4\cos x+8-4\cos x}{2(5-4\cos x)}=\frac{3}{2(5-4\cos x)}\\
&= \frac{3}{2}\frac{1}{5-4\cos x}
\end{aligned}$$

La fonction f continue, $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$ et admettant comme coefficients de Fourier trigonométriques $a_n(f)=\frac{1}{2^n}$ et $b_n(f)=0$ est la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{3}{2}\frac{1}{5-4\cos x}$$

Question 2.

On a : $\int_0^{\pi}\frac{dt}{5-4\cos t}=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}f(t)\,dt$.

Or, on a, en tenant compte de la parité de f : $a_0=1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\,dt$.

On déduit de ce qui précède : $\int_0^{\pi}f(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$ puis $\int_0^{\pi}\frac{dt}{5-4\cos t}=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}f(t)\,dt=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$.

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{5-4\cos t}=\frac{\pi}{3}$$