Soit *f* une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Soit alors F la fonction de $\mathbb{R}^n \setminus \{(0;0;...;0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right)$$

Donner le Laplacien de F en fonction de *f*.

Analyse

Dans cet exercice, on s'intéresse au Laplacien d'une fonction qui est fondamentalement une fonction de la seule distance euclidienne $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. On est ainsi amené à dériver partiellement des fonctions composées et on obtient un résultat classique.

Résolution

Introduisons la fonction g de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Dans ces conditions : $\mathrm{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = f(g(x_1, x_2, ..., x_n)) = (f \circ g)(x_1, x_2, ..., x_n)$.

On cherche : $\Delta\mathrm{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Soit alors i un entier quelconque dans $[\![1; n]\!]$.

On a : $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \times (f' \circ g)(x_1, x_2, ..., x_n)$.

En tenant compte de : $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = \dfrac{\cancel{2} x_i}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \dfrac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}$, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) &= \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \times (f' \circ g)(x_1, x_2, ..., x_n) \\ &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \times f'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right)\end{aligned}$$

On peut dériver partiellement une deuxième fois par rapport à x_i.

Introduisons d'abord la fonction h_i définie $\mathbb{R}^n \setminus \{(0\,;0\,;\ldots;0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = x_i\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \times f'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) \\ &= h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times (f' \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} + x_i \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2x_i \times \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} - \frac{x_i^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \\ &= \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - x_i^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times (f' \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times (f'' \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times (f' \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + \left(h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)^2 \times (f'' \circ g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - x_i^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \times f'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}\right)^2 \times f''\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) \\ &= \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) - x_i^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} \times f'\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) \\ &\quad + \frac{x_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \times f''\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right)\end{aligned}$$

En sommant alors sur l'indice *i*, il vient :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i^2}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)-x_i^2}{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}\times f'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)\right\}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{x_i^2}{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\times f''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{f'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)}{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}\times\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)-x_i^2\right\}$$

$$+\frac{f''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)}{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\times\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$=\frac{f'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)}{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}\times\left\{n\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

$$+\frac{f''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)}{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\times\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

$$=\frac{f'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)}{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}\times\left(n-1\right)\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

$$+f''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}\,f'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)+f''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)$$

En définitive :

$$\Delta\mathrm{F}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i^2}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}}\,f'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)+f''\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}\right)$$

En posant classiquement $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}$, on a :

$$\Delta\mathrm{F}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i^2}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=\frac{n-1}{r}\,f'\left(r\right)+f''\left(r\right)$$

Résultat final

$$\Delta\mathrm{F}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i^2}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{n-1}{r} f'(r) + f''(r)$$

$$\text{où } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$