

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0; 0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de  $f$ .
2. Etudier la continuité des dérivées partielles de  $f$ .
3. Montrer que :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0; 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0; 0)$ .

---

## Analyse

Au regard de l'expression de  $f(x, y)$  pour  $(x, y) \neq (0; 0)$ , on est amené à se concentrer sur le point  $(0; 0)$ . En ce point particulier, on est amené à calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en se ramenant à la définition.

---

## Résolution

### Question 1.

La continuité de la fonction  $f$  ne pose pas de problème sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$ . Nous allons en revanche l'étudier plus spécifiquement en  $(0; 0)$ .

Passons en coordonnées polaires en posant classiquement  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  (avec  $r \geq 0$ ). Il vient alors, pour  $(x, y) \neq (0; 0)$ , c'est à dire pour  $r > 0$  :

$$\frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = \frac{(r \cos \theta)^3 r \sin \theta}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^2} = r^2 \cos^3 \theta \sin \theta$$

Ainsi, pour  $r > 0$  :  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 \cos^3 \theta \sin \theta$ .

Il en découle :  $\forall r > 0, 0 \leq |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = |r^2 \cos^3 \theta \sin \theta| \leq r^2$ .

Comme  $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0$ , on en déduit immédiatement (encadrement) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$$

On en déduit :  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0; 0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ .

Or, on a :  $f(0; 0) = 0$ . Il vient donc :  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0; 0)} f(x, y) = f(0; 0)$  et on peut finalement conclure à la continuité de  $f$  en  $(0; 0)$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Question 2.

Commençons par nous placer en  $(x, y) \neq (0; 0)$ .

On a alors :  $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$  et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2 y \times (x^2 + y^2) - x^3 y \times 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y [3(x^2 + y^2) - 2x^2]}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 y (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 \times (x^2 + y^2) - x^3 y \times 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 [(x^2 + y^2) - 2y^2]}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Les dérivées partielles du premier ordre ne pose pas de problème de continuité en tout point  $(x, y) \neq (0; 0)$ .

Etudions les dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre en  $(0; 0)$ .

Par définition, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x; 0) - f(0; 0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{0}{x} = 0$$

Et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{f(0; y) - f(0; 0)}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{0}{y} = 0$$

En procédant comme dans la question 1, on a facilement, pour  $(x, y) \neq (0; 0)$ , c'est-à-dire  $r > 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{(r \cos \theta)^2 r \sin \theta \left( (r \cos \theta)^2 + 3(r \sin \theta)^2 \right)}{\left( (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \right)^2} \\ &= \frac{r^2 \cos^2 \theta r \sin \theta (r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta)}{r^4} \\ &= r \cos^2 \theta \sin \theta (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) \\ &= r \cos^2 \theta \sin \theta (1 + 2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Il en découle :  $\forall r > 0, 0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| = \left| r \cos^2 \theta \sin \theta (1 + 2 \sin^2 \theta) \right| \leq 3r$ .

Comme  $\lim_{r \rightarrow 0} 3r = 0$ , on en déduit immédiatement (encadrement) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$$

On en déduit :  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0; 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ .

Or, on a :  $\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = 0$ . Il vient donc :  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0; 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0; 0)$  et on peut finalement conclure à la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $(0; 0)$ .

La fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

On procède de façon similaire avec  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

On a cette fois : pour  $(x, y) \neq (0; 0)$ , c'est-à-dire  $r > 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{(r \cos \theta)^3 \left( (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 \right)}{\left( (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \right)^2} \\ &= \frac{r^3 \cos^3 \theta (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)}{r^4} \\ &= r \cos^3 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= r \cos^3 \theta \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $r > 0$  :  $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos^3 \theta \cos(2\theta)$ .

Il en découle :  $\forall r > 0, 0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| = \left| r \cos^3 \theta \cos(2\theta) \right| \leq r$ .

Comme  $\lim_{r \rightarrow 0} r = 0$ , on en déduit immédiatement (encadrement) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$$

On en déduit :  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$ .

Or, on a :  $\frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$ . Il vient donc :  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0;0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)$  et on peut finalement

conclure à la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0;0)$ .

La fonction  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Question 3.

Pour ce qui est des dérivées partielles d'ordre 2, nous nous concentrons encore sur le point  $(0;0)$ .

Par définition, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0) = \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right](0;0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0;y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)}{y}$$

Or, pour  $y \neq 0$ , on a :  $\frac{\partial f}{\partial x}(0;y) = \frac{0^2 \times y \times (0^2 + 3y^2)}{(0^2 + y^2)^2} = 0$  et il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0;y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0;0)}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

Et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right](0;0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x;0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0;0)}{x}$$

Or, pour  $x \neq 0$ , on a :  $\frac{\partial f}{\partial y}(x; 0) = \frac{x^3(x^2 - 0^2)}{(x^2 + 0^2)^2} = \frac{x^5}{x^4} = x$  et il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0; 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x; 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x}{x} = 1$$

Finalement :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0; 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0; 0)$$

On tire de ce résultat qu'au moins une des deux dérivées partielles secondes croisées de  $f$  n'est pas continue en  $(0; 0)$ . En effet, si les deux dérivées partielles secondes croisées de  $f$  étaient

continues en  $(0; 0)$ , alors on aurait  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0; 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0; 0)$  (théorème de Schwarz).