Déterminer les fonctions $f : \mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \end{cases}$$

On précisera le domaine D.

Analyse

Un travail classique de « reconstruction » d'une fonction numérique de deux variables réelles à partir de ses deux dérivées partielles d'ordre 1.

Résolution

Il faut $x+y \neq 0$. On travaille donc sur tout domaine ouvert D inclus dans l'un des deux demi-plans d'équations $x+y>0$ ou $x+y<0$.

Soit alors y fixé.

Comme on a : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$, on obtient facilement : $f(x, y) = \dfrac{-y^2}{x+y} + \varphi(y)$ où φ est une fonction réelle de la variable réelle dérivable pour tout y tel que $(x, y) \in \mathrm{D}$.

Il en résulte alors : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \dfrac{-2y(x+y)+y^2}{(x+y)^2} + \varphi'(y) = \dfrac{-2xy - y^2}{(x+y)^2} + \varphi'(y)$.

Or, on veut : $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$.

La fonction φ doit donc satisfaire pour tout y tel que $(x, y) \in \mathrm{D}$:

$$\frac{-2xy - y^2}{(x+y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Soit : $\varphi'(y) = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} + \dfrac{2xy+y^2}{(x+y)^2} = \dfrac{x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2} = \dfrac{(x+y)^2}{(x+y)^2} = 1$.

On en tire immédiatement : $\varphi(y) = y + C$ où C est une constante réelle.

En définitive, on a :

$$f(x, y) = \frac{-y^2}{x+y} + y + C = \frac{-y^2 + y(x+y)}{x+y} + C = \frac{xy}{x+y} + C$$

Résultat final

La fonction f cherchée est définie sur tout domaine ouvert D
inclus dans l'un des deux demi-plans d'équations $x + y > 0$ ou $x + y < 0$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x+y} + C$$

où C est une constante réelle.