Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et B un sous-ensemble de A.
On appelle « annulateur de B », noté $\mathcal{A}(B)$, le sous-ensemble de A :

$$\mathcal{A}(B)=\{a\in A / \forall b\in B, a\times b=0_A\}$$

Montrer que $\mathcal{A}(B)$ est un idéal de A.

Analyse

L'exercice ne présente pas de difficultés particulières. On utilise la définition d'un idéal d'un anneau et on est conduit à utiliser certaines propriétés des lois de l'anneau (distributivité, associativité).

Résolution

Si on note + et $\times$ les lois de A, nous allons, dans un premier temps, montrer que $(\mathcal{A}(B),+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$.

- $\mathcal{A}(B)$ est non vide car 0_A appartient à $\mathcal{A}(B)$.
  En effet, pour n'importe quel élément b de B, on a immédiatement : $0_A\times b=0_A$.
- Soit maintenant a et a' deux éléments de $\mathcal{A}(B)$. Montrons que $a-a'$ est également un élément de $\mathcal{A}(B)$.
  Pour tout élément b de B, on a : $(a-a')\times b=a\times b-a'\times b=0_A-0_A=0_A$.
  Le résultat est ainsi établi.

De ce qui précède, on conclut que $(\mathcal{A}(B),+)$ est bien un sous-groupe de $(A,+)$.

On va maintenant montrer que pour tout a de $\mathcal{A}(B)$ et tout x de A, $x\times a$ est encore un élément de $\mathcal{A}(B)$.

On considère donc un élément quelconque a de $\mathcal{A}(B)$.
Pour tout x de A et tout b de B, on a alors : $(x\times a)\times b=x\times(a\times b)=x\times 0_A=0_A$.

L'élément $x \times a$ est bien un élément de $\mathcal{A}(B)$.

En résumé :

- $(\mathcal{A}(B),+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$.
- $\forall a \in \mathcal{A}(B),\ \forall x \in A,\ x \times a \in \mathcal{A}(B)$.

On peut alors conclure que $\mathcal{A}(B)$ est un idéal de A.

Résultat final

Pour tout anneau commutatif $(A,+,\times)$ et tout sous-ensemble B de A, le sous-ensemble

$$\mathcal{A}(B) = \{a \in A \,/\, \forall b \in B, a \times b = 0_A\}$$

est un idéal de A, appelé « annulateur de B ».