

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau commutatif.

On dit d'un idéal  $I$  de  $A$  qu'il est « premier » s'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in A^2, xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I$$

L'objectif est ici de démontrer que tout anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers est un corps.

On suppose donc que tous les idéaux de  $A$  sont premiers.

1. Démontrer que  $A$  est intègre.
2. Soit  $a$  un élément non nul de  $A$ . Démontrer que les idéaux engendrés par  $a$  et  $a^2$  sont égaux. En déduire alors que  $a$  est inversible et conclure.

---

## Analyse

Un exercice mettant en œuvre quelques notions fondamentales relatives aux anneaux et aux idéaux.

---

## Résolution

### Question 1.

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ . Supposons que l'on ait :  $xy = 0_A$ .

L'ensemble  $\{0_A, +, \times\}$  est un idéal de  $A$ . Par hypothèse, il est premier. On en déduit donc :

$x \in \{0_A\}$  ou  $y \in \{0_A\}$ . C'est-à-dire :  $x = 0_A$  ou  $y = 0_A$ . L'anneau  $A$  est bien intègre.

L'anneau  $A$  est intègre.

### Question 2.

Notons  $(a)$  et  $(a^2)$  les idéaux respectivement engendrés par  $a$  et  $a^2$ . Pour établir l'égalité

$(a) = (a^2)$ , il suffit d'établir :  $a \in (a^2)$  et  $a^2 \in (a)$ .

La deuxième appartenance ne pose pas de difficulté particulière.  $(a)$  étant un idéal de  $A$ , on a, par définition d'un idéal :  $\forall x \in A, xa \in (a)$ . En choisissant en particulier  $x = a$ , on obtient :  $a^2 \in (a)$ .

Pour établir la deuxième appartenance, nous allons utiliser le fait que l'idéal  $(a^2)$  est premier. On a en effet :  $a^2 \in (a^2)$ , c'est-à-dire :  $a \times a \in (a^2)$ . L'idéal  $(a^2)$  étant premier, on en tire :  $a \in (a^2)$  ou  $a \in (a^2)$ , c'est-à-dire :  $a \in (a^2)$ .

Comme  $a \in (a^2)$  et  $a^2 \in (a)$ , il vient :  $(a) = (a^2)$ . Le résultat est ainsi établi.

Pour tout élément  $a$  non nul de  $A$ , les idéaux engendrés par  $a$  et  $a^2$  sont égaux.

Puisque  $a$  appartient à l'idéal  $(a^2)$ , on peut affirmer qu'il existe un élément  $b$  de  $A$  tel que :

$$a = ba^2. \text{ Soit : } ba^2 - a = 0_A, \text{ d'où : } a(ba - 1_A) = 0_A.$$

Or, à la question précédente, nous avons établi que l'anneau  $A$  était intègre. On en déduit :

$$a = 0_A \text{ ou } ba - 1_A = 0_A. \text{ L'élément } a \text{ considéré étant non nul, il vient : } ba - 1_A = 0_A.$$

On en tire que  $a$  est inversible d'inverse l'élément  $b$ .

Tout élément non nul de  $A$  est inversible.

Puisque tout élément non nul de  $A$  est inversible, on en déduit finalement :

$(A, +, \times)$  est un corps.

---

## Résultat final

Tout anneau commutatif  $(A, +, \times)$  dont tous les idéaux sont premiers est un corps.