

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. On dit que  $A$  est « booléen » (ou que «  $A$  est un anneau de Boole ») si pour tout  $a$  de  $A$ , on a :  $a \times a = a$ .

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble de ses parties.

Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau booléen.

(on rappelle que la loi  $\Delta$ , appelée « différence symétrique », est définie par :  $\forall (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ ,  $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ )

---

## Analyse

Un exercice classique faisant essentiellement appel aux définitions fondamentales des structures de groupes et d'anneaux et nécessitant un peu de manipulations (union, intersection, complémentaire) sur les parties d'un ensemble.

---

## Résolution

On a immédiatement :  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $A \cap A = A$ .

Il suffit donc d'établir que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau.

Commençons par établir que  $(\mathcal{P}(E), \Delta)$  est un groupe (commutatif ...).

- $\mathcal{P}(E) \neq \emptyset$  puisque  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ .
- La loi  $\Delta$  est clairement commutative :

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2, X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X) = (Y - X) \cup (X - Y) = Y \Delta X$$

- La loi  $\Delta$  est-elle associative ?

Pour toutes parties  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  de  $E$ , il nous faut comparer :  $(X \Delta Y) \Delta Z$  et  $X \Delta (Y \Delta Z)$ .

$$(X \Delta Y) \Delta Z = ((X \Delta Y) - Z) \cup (Z - (X \Delta Y))$$

Pour pouvoir simplifier cette écriture, nous allons considérer une autre expression de la différence symétrique. En notant  $\bar{X}$  le complémentaire de  $X$  dans  $E$ , on a (en utilisant les propriétés classiques de l'intersection et de la réunion) :

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X) = (X \cap \bar{Y}) \cup (Y \cap \bar{X}) = (X \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (X \Delta Y) \Delta Z &= ((X \Delta Y) - Z) \cup (Z - (X \Delta Y)) \\ &= ((X \Delta Y) \cup Z) \cap (\overline{(X \Delta Y) \cup Z}) \\ &= [((X \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})) \cup Z] \cap [\overline{((X \cup Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})) \cup Z}] \\ &= (X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z) \cap [\overline{(X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z)}] \\ &= (X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z) \cap [(\bar{X} \cap \bar{Y}) \cup (X \cap Y) \cup \bar{Z}] \\ &= (X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z) \cap [((\bar{X} \cup X) \cap (\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{Y} \cup X) \cap (\bar{Y} \cup Y)) \cup \bar{Z}] \\ &= (X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z) \cap [((\bar{X} \cup Y) \cap (\bar{Y} \cup X)) \cup \bar{Z}] \\ &= \boxed{(X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z) \cap (\bar{X} \cup Y \cup \bar{Z}) \cap (X \cup \bar{Y} \cup \bar{Z})} \end{aligned}$$

Il convient désormais d'évaluer :  $X \Delta (Y \Delta Z)$ , soit, la loi  $\Delta$  étant commutative :  $(Y \Delta Z) \Delta X$ .

On peut utiliser le résultat obtenu précédemment : il suffit de remplacer  $X$  par  $Y$ ,  $Y$  par  $Z$  et  $Z$  par  $X$ . Nous n'avons en fait pas besoin d'écrire le résultat pour affirmer qu'il y aura égalité.

En effet, l'expression obtenue ci-dessus :

$$(X \cup Y \cup Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup Z) \cap (\bar{X} \cup Y \cup \bar{Z}) \cap (X \cup \bar{Y} \cup \bar{Z})$$

est invariante pour toute permutation de l'ensemble  $\{X, Y, Z\}$  (i.e. toute bijection de cet ensemble dans lui-même).

On a bien :

$$\forall (X, Y, Z) \in (\mathcal{P}(E))^3, (X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$$

- $\emptyset$  est neutre pour  $\Delta$ .

En effet :  $\forall X \in \mathcal{P}(E), X - \emptyset = X$  et  $\emptyset - X = \emptyset$ .

On en déduit alors :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), X \Delta \emptyset = \emptyset \Delta X = (X - \emptyset) \cup (\emptyset - X) = X \cup \emptyset = X$$

- Toute partie  $X$  de  $E$  est son propre symétrique pour  $\Delta$  :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), X \Delta X = (X - X) \cup (X - X) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

En définitive, nous pouvons affirmer, d'après ce qui précède, que  $(\mathcal{P}(E), \Delta)$  est un groupe commutatif.

Il convient maintenant de prendre en compte la deuxième loi, c'est-à-dire l'intersection.

- $\cap$  est associative.
- $\cap$  est commutative.
- $\cap$  admet comme éléments neutre l'ensemble  $E$ .

En effet :  $\forall X \in \mathcal{P}(E), X \cap E = E \cap X = X$ .

- $\cap$  est-elle distributive par rapport à  $\Delta$  ?  
Pour toutes parties  $X, Y$  et  $Z$  de  $E$ , il convient de comparer :  $X \cap (Y \Delta Z)$  et  $(X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$ .

On a :

$$X \cap (Y \Delta Z) = X \cap [(Y \cap \bar{Z}) \cup (\bar{Y} \cap Z)] = (X \cap Y \cap \bar{Z}) \cup (X \cap \bar{Y} \cap Z)$$

Et par ailleurs :

$$\begin{aligned} (X \cap Y) \Delta (X \cap Z) &= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap [\overline{(X \cap Y) \cup (X \cap Z)}] \\ &= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap [(\bar{X} \cup \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cup \bar{Z})] \\ &= [(X \cap Y) \cup (X \cap Z)] \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z}) \\ &= [(X \cap Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z})] \cup [(X \cap Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z})] \\ &= \underbrace{(X \cap Y \cap \bar{X})}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(X \cap Y \cap \bar{Y})}_{=\emptyset} \cup (X \cap Y \cap \bar{Z}) \\ &\quad \cup \underbrace{(X \cap Z \cap \bar{X})}_{=\emptyset} \cup (X \cap Z \cap \bar{Y}) \cup \underbrace{(X \cap Z \cap \bar{Z})}_{=\emptyset} \\ &= (X \cap Y \cap \bar{Z}) \cup (X \cap Z \cap \bar{Y}) \end{aligned}$$

On a ainsi retrouvé le résultat obtenu précédemment.

En définitive, nous pouvons conclure que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif.

---

## Résultat final

Pour tout ensemble  $E$ ,  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif.