

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et soit I un idéal de A .

On définit alors « le radical de I », noté \sqrt{I} , comme suit :

$$\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$$

1. Montrer que, pour tout idéal I de A , \sqrt{I} est un idéal de A .
2. Montrer que pour tout idéal I de A , $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Montrer que pour tous idéaux I et J de A , on a : $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$.
4. Montrer que pour tous idéaux I et J de A , on a : $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$.
5. Soit $A = \mathbb{Z}$, $I = 15288\mathbb{Z}$. Déterminer \sqrt{I} .

Analyse

Un exercice très classique qui passe en revue les principales propriétés du radical d'un idéal dans un anneau.

Résolution

Question 1.

Tout d'abord, comme $0^1 = 0$, on en déduit que 0 appartient à \sqrt{I} qui est donc non vide.

Dans un second temps, il convient d'établir que $(\sqrt{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.

Considérons x et y deux éléments quelconques de \sqrt{I} . Il existe donc, par définition de \sqrt{I} , deux entiers naturels n et m tels que x^n et y^m soient deux éléments de I .

Soit alors $(x - y)^{n+m}$. L'anneau A étant commutatif, on a :

$$(x - y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} (-1)^k x^k y^{n+m-k}$$

Comme x^n (respectivement y^m) appartient à I , il en va immédiatement de même pour toute puissance de x (respectivement y) d'exposant supérieur à m (respectivement n). On récrit alors la somme comme suit :

$$\begin{aligned}(x-y)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} (-1)^k x^k y^{n+m-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+m}{k} (-1)^k x^k y^{n+m-k} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} (-1)^k x^k y^{n+m-k}\end{aligned}$$

Dans la première somme, toutes les puissances y^{n+m-k} appartiennent à I . Comme c 'est un idéal de A , il en va de même pour les produits $x^k y^{n+m-k}$.

Dans la seconde somme, toutes les puissances x^k appartiennent à I . Comme c 'est un idéal de A , il en va de même pour les produits $x^k y^{n+m-k}$.

En définitive, tous les termes de la somme $\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} (-1)^k x^k y^{n+m-k}$ appartiennent à I et finalement $(x-y)^{n+m}$ appartient à I .

On en déduit ainsi que $x-y$ appartient à I . $(\sqrt{I}, +)$ est bien un sous-groupe de $(A, +)$.

Soit maintenant x un élément quelconque de \sqrt{I} . Il existe donc un entier naturel n tel que x^n appartient à I . Pour tout élément a de A , on a alors :

$$(ax)^n = a^n x^n$$

Comme x^n appartient à I , idéal de A , on en tire immédiatement que $a^n x^n$, c'est-à-dire $(ax)^n$, appartient à I . En définitive, ax appartient à \sqrt{I} .

\sqrt{I} est un idéal de A .

Question 2.

Pour tout idéal I de A et pour tout x de I , on a : $x = x^1 \in I$. On en déduit immédiatement : $x \in \sqrt{I}$.

D'où : $I \subset \sqrt{I}$.

Comme nous avons montré, à la question précédente, que \sqrt{I} était un idéal de A , l'inclusion précédente s'applique à \sqrt{I} et il vient immédiatement : $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$.

Soit maintenant x un élément de $\sqrt{\sqrt{I}}$. Par définition, il existe un entier naturel n tel que $x^n \in \sqrt{I}$. Mais il existe alors un deuxième entier naturel, m , tel que : $(x^n)^m = x^{nm} \in I$. On en conclut que x appartient à \sqrt{I} . On a donc : $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$.

La double inclusion fournit l'égalité.

Pour tout idéal I de A , on a :

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

Question 3.

Soit I et J deux idéaux de A .

Soit x dans $\sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Par définition, il existe deux entiers n et m tels que x^n appartient à I et x^m appartient à J . Alors $(x^n)^m = x^{nm}$ appartient à I et $(x^m)^n = x^{nm}$ appartient à J ; c'est-à-dire : x^{nm} appartient à $I \cap J$. On en déduit alors que x appartient à $\sqrt{I \cap J}$.

On a donc : $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{I \cap J}$.

Soit maintenant x un élément de $\sqrt{I \cap J}$. Il existe donc un entier naturel n tel que x^n appartient à $I \cap J$. x^n appartenant à I , on en déduit que x appartient à \sqrt{I} ; x^n appartenant à J , on en déduit que x appartient à \sqrt{J} . En définitive, x appartient à $\sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

On a donc : $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

La double inclusion fournit l'égalité.

Pour tous idéaux I et J de A , on a :

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

Question 4.

Soit x dans $\sqrt{I} + \sqrt{J}$. On peut donc écrire : $x = y + z$ avec y appartenant à \sqrt{I} et z appartenant à \sqrt{J} . Il existe donc deux entiers naturels n et m tels que y^n (et, de fait, I étant un idéal, toute puissance de y d'exposant supérieur à n) appartient à I et z^m appartient à J (et, de fait, J étant un idéal, toute puissance de z d'exposant supérieur à m).

De façon analogue à ce qui a été fait à la première question, on a :

$$\begin{aligned} (y+z)^{n+m} &= \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} y^k z^{n+m-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+m}{k} y^k z^{n+m-k} + \sum_{k=n+1}^{n+m} \binom{n+m}{k} y^k z^{n+m-k} \end{aligned}$$

Dans la première somme, toutes les puissances z^{n+m-k} appartiennent à J (car $n+m-k \geq m$). Comme c' est un idéal de A , il en va de même pour les produits $y^k z^{n+m-k}$.

Dans la seconde somme, toutes les puissances y^k appartiennent à I (car $k > n$). Comme c' est un idéal de A , il en va de même pour les produits $x^k y^{n+m-k}$.

En définitive, la somme $\sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} y^k z^{n+m-k}$ appartient à $I + J$. On en déduit immédiatement que l'élément $y + z$ appartient à $\sqrt{I + J}$.

Pour tous idéaux I et J de A , on a :

$$\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$$

Question 5.

Notons d'abord que toute puissance (d'exposant un entier naturel) d'un entier admet les mêmes diviseurs premiers que cet entier (s vaut 1 ou -1 suivant que l'entier est positif ou négatif. Les α_i sont des entiers naturels supérieurs à 1) :

$$x = s \times p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_m^{\alpha_m} \Rightarrow x^n = s^n \times p_1^{n\alpha_1} \times p_2^{n\alpha_2} \times \dots \times p_m^{n\alpha_m}$$

On a aussi : $15\,288 = 2^3 \times 3^1 \times 7^2 \times 13^1$.

De ce qui précède, on déduit qu'une condition nécessaire pour qu'une puissance d'un entier soit un multiple de 15 288 est que l'entier admette au moins 2, 3, 7 et 13 comme diviseurs premiers. En d'autres termes, l'entier doit être un multiple de $2 \times 3 \times 7 \times 13 = 546$, c'est-à-dire appartenir à $546\mathbb{Z}$.

Montrons que cette condition est suffisante.
Soit x un entier dans $546\mathbb{Z}$. On peut écrire :

$$x = s \times 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 7^{\alpha_3} \times 13^{\alpha_4} \times p_5^{\alpha_5} \times \dots \times p_m^{\alpha_m}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x^6 &= 2^{6\alpha_1} \times 3^{6\alpha_2} \times 7^{6\alpha_3} \times 13^{6\alpha_4} \times p_5^{6\alpha_5} \times \dots \times p_m^{6\alpha_m} \\ &= (2^3 \times 3^1 \times 7^2 \times 13^1) \times (2^{6\alpha_1-3} \times 3^{6\alpha_2-1} \times 7^{6\alpha_3-2} \times 13^{6\alpha_4-1} \times p_5^{6\alpha_5} \times \dots \times p_m^{6\alpha_m}) \end{aligned}$$

Soit : $15\,288 \mid x^6$.

Finalement : $\sqrt{I} = \sqrt{15\,288\mathbb{Z}} = 546\mathbb{Z}$.

$$\sqrt{15\,288\mathbb{Z}} = 546\mathbb{Z}$$