Soit $(\mathscr{A},+,.)$ un anneau.

Soit a et b deux éléments de $\mathscr{A}$ tels que $a.b$ est inversible et $b.a$ n'est pas un diviseur de 0.

Montrer que a et b sont inversibles.

Analyse

Un exercice où l'inversibilité de $a.b$ sert de point de départ (puisqu'elle permet d'affirmer l'existence d'un élément c tel que …).

Résolution

Puisque $a.b$ est inversible, il existe un élément c de $\mathscr{A}$ tel que :

$$(a.b).c = c.(a.b) = 1$$

On a d'abord :

$$\begin{aligned} & (a.b).c = 1 \\ \Leftrightarrow\ & a.(b.c) = 1 \\ \Rightarrow\ & b.a.(b.c) = b.1 = b \\ \Rightarrow\ & (b.a).(b.c).a = b.a \end{aligned}$$

Comme l'élément $b.a$ n'est pas un diviseur de 0, nous pouvons simplifier la dernière égalité obtenue et il vient finalement : $(b.c).a = 1$.

Les deux égalités $a.(b.c) = 1$ et $(b.c).a = 1$ nous permettent alors de conclure immédiatement que l'élément a est inversible d'inverse l'élément $b.c$.

On a ensuite : $(b.c).a = 1 \Leftrightarrow b.(c.a) = 1$.

Puis : $c.(a.b) = 1 \Leftrightarrow (c.a).b = 1$.

Les deux égalités $(c.a).b = 1$ et $b.(c.a) = 1$ nous permettent alors de conclure immédiatement que l'élément b est inversible d'inverse l'élément $c.a$.