

Existence et calcul de :

$$I = \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$$

Analyse

La racine carrée dans l'argument de l'exponentielle engendre quelques calculs supplémentaires (dont un changement de variable) mais pas de difficulté majeure.

Résolution

Notons, dans un premier temps, que la fonction $t \mapsto t e^{-\sqrt{t}}$ est à valeur positives sur \mathbb{R}_+ .

La borne « 0 » ne pose pas de problème.

On a par ailleurs : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 e^{-\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^{\sqrt{t}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X^6}{e^X} = 0$.

On en déduit que pour t suffisamment grand, on a : $t^3 e^{-\sqrt{t}} < 1$, soit : $t e^{-\sqrt{t}} < \frac{1}{t^2}$. Or, pour tout

réel a strictement positif, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Il en va donc de même pour $\int_a^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$ et pour $\int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$.

$$I = \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt \text{ existe}$$

Considérons la fonction φ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ définie par : $\varphi : u \mapsto \varphi(u) = u^2 = t$.

Elle est bijective et de classe \mathcal{C}^1 .

On a alors, en tenant compte de $dt = 2u du$: $I = \int_0^{+\infty} u^2 e^{-\sqrt{u^2}} 2u du = 2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du$.

On peut facilement obtenir une primitive sur \mathbb{R}_+ de la fonction $f : u \mapsto u^3 e^{-u}$ sous la forme $F : u \mapsto P(u)e^{-u}$ où P est une fonction polynôme de degré 3 : $P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$.

Il vient :

$$\begin{aligned} F'(u) &= [P'(u) - P(u)]e^{-u} \\ &= [(3au^2 + 2bu + c) - (au^3 + bu^2 + cu + d)]e^{-u} \\ &= [-au^3 + (3a - b)u^2 + (2b - c)u + (c - d)]e^{-u} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} F'(u) &= f(u) \\ \Leftrightarrow [-au^3 + (3a - b)u^2 + (2b - c)u + (c - d)]e^{-u} &= u^3 e^{-u} \\ \Leftrightarrow -au^3 + (3a - b)u^2 + (2b - c)u + (c - d) &= u^3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 3a - b = 0 \\ 2b - c = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient facilement : $a = -1$, $b = -3$ et $c = d = -6$.

Soit : $F : u \mapsto (-u^3 - 3u^2 - 6u - 6)e^{-u} = -(u^3 + 3u^2 + 6u + 6)e^{-u}$.

Pour tout réel A positif, on a alors :

$$I(A) = 2 \int_0^A u^3 e^{-u} du = 2 \left[-(u^3 + 3u^2 + 6u + 6)e^{-u} \right]_0^A = -2(A^3 + 3A^2 + 6A + 6)e^{-A} + 12$$

Pour tout entier naturel n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$, on a : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \{-2(A^3 + 3A^2 + 6A + 6)e^{-A}\} = 0$.

Il vient alors :

$$I = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \{-2(A^3 + 3A^2 + 6A + 6)e^{-A} + 12\} = 12$$

$I = 12$

Résultat final

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} t e^{-\sqrt{t}} dt$ existe et vaut 12.