Existence et calcul de :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

Analyse

La fonction sous le signe « $\int$ » est à valeur positives et on peut facilement en donner un équivalent en $+\infty$. La convergence est ainsi aisée à établir. Pour ce qui est du calcul, on remarquera que la fonction est de la forme $u'\times u$ …

Résolution

Notons, dans un premier temps, que la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ est à valeur positives sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, on a immédiatement : $\dfrac{\arctan x}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x^2}$. Or, pour tout réel a strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,dx$ est convergente (intégrale de Riemann).

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ est convergente.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \text{ existe}}$$

Soit maintenant A un réel positif.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ étant la fonction dérivée de la fonction arctan, on a immédiatement :

$$\int_0^A \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^A = \frac{1}{2}(\arctan A)^2$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, on a par composition : $\lim\limits_{A\to+\infty} \left\{\dfrac{1}{2}(\arctan A)^2\right\} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$$

Résultat final

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ existe et vaut $\frac{\pi^2}{8}$.