

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)}$$

1. Montrer que I_n et J_n convergent.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $I_n = J_n$.
3. Calculer, pour tout entier naturel n , I_n et J_n .

Analyse

Les fonctions sous le signe « \int » sont à valeurs positives et on peut facilement en donner des équivalents en $+\infty$. La convergence est ainsi aisée à établir. Pour ce qui est de la deuxième question, on pourra réfléchir à un changement de variable ...

Résolution

Question 1.

La borne « 0 » ne pose pas de problème puisque l'on a :

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{1}{(1+u^2)(1+u^n)} = 1 \text{ et } \lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} \frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)} = 0$$

Pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{(1+u^2)(1+u^n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{n+2}}$ et on a : $n+2 > 1$.

Ce premier résultat assure la convergence de I_n (comparaison à une intégrale de Riemann convergente).

Par ailleurs, on a : $\frac{u^n}{(1+u^2)(1+u^n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$ et on a : $2 > 1$.

Ce deuxième résultat assure la convergence de J_n (comparaison à une intégrale de Riemann convergente).

Les intégrales I_n et J_n convergent.

Question 2.

Considérons le changement de variable $t \mapsto u = \frac{1}{t}$ bijectif de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* .

Il vient immédiatement : $du = -\frac{1}{t^2} dt$ et, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} = \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^n}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^n dt}{(1+t^2)(1+t^n)} = J_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$$

Question 3.

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} 2I_n &= I_n + J_n \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} + \int_0^{+\infty} \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^n) du}{(1+u^2)(1+u^n)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \end{aligned}$$

Pour tout A réel strictement positif, on a :

$$\int_0^A \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^A = \arctan A$$

On en déduit : $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{du}{1+u^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$.

Finalement, pour tout n entier naturel : $I_n = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)} = J_n = \frac{\pi}{4}$$