

Calculer :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{\cos t \times \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \times \sinh t} dt$$

Analyse

Les bornes de l'intervalle d'intégration sont variables mais ... la fonction à intégrer se comporte « sympathiquement » au voisinage de 0 !

Résolution

Posons d'abord : $\varphi(t) = \frac{\cos t \times \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \times \sinh t}$ qui est définie pour $t \neq 0$.

On a facilement les équivalences : $\cos t \underset{0}{\sim} 1$, $\ln(1+t^2) \underset{0}{\sim} t^2$, $\sin^2 t \underset{0}{\sim} t^2$ et $\sinh t \underset{0}{\sim} t$.

D'où : $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{1 \times t^2}{t^2 \times t} = \frac{1}{t}$.

La fonction inverse est intégrable au voisinage de 0 et il n'y a donc pas de problème d'existence de toute intégrale de la forme $\int_0^a \varphi(t) dt$ où a est un réel non nul.

Il en va donc de même pour $\int_x^{2x} \varphi(t) dt = \int_0^{2x} \varphi(t) dt - \int_0^x \varphi(t) dt$ pour tout x réel non nul (à fortiori strictement positif).

Pour pouvoir calculer la limite demandée, nous allons donner un développement limité généralisé de φ au voisinage de l'origine.

Au numérateur, nous avons $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$ et $\ln(1+t^2) = t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^5)$ d'où :

$$\cos t \times \ln(1+t^2) = \left[1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3) \right] \times \left[t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^5) \right] = t^2 - t^4 + o(t^5)$$

On a par ailleurs : $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$. D'où : $\sin^2 t = \left[t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \right]^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^5)$.

Or $\sinh t = t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)$.

On en déduit :

$$\sin^2 t \times \sinh t = \left[t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^5) \right] \times \left[t + \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \right] = t^3 - \frac{1}{6}t^5 + o(t^6)$$

Ainsi :

$$\varphi(t) = \frac{\cos t \times \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \times \sinh t} = \frac{t^2 - t^4 + o(t^5)}{t^3 - \frac{1}{6}t^5 + o(t^6)} = \frac{t^2 [1 - t^2 + o(t^3)]}{t^3 [1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^3)]} = \frac{1}{t} \times [1 - t^2 + o(t^3)] \times [1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^3)]^{-1}$$

$$\text{On a : } [1 - t^2 + o(t^3)] \times [1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^3)]^{-1} = [1 - t^2 + o(t^3)] \times [1 + \frac{1}{6}t^2 + o(t^3)] = 1 - \frac{5}{6}t^2 + o(t^2)$$

Finalement :

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \times [1 - t^2 + o(t^3)] \times [1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^3)]^{-1} = \frac{1}{t} \times [1 - \frac{5}{6}t^2 + o(t^2)] = \frac{1}{t} - \frac{5}{6}t + o(t)$$

D'où, pour tout réel x non nul :

$$\int_x^{2x} \varphi(t) dt = \int_x^{2x} \left[\frac{1}{t} - \frac{5}{6}t + o(t) \right] dt = \int_x^{2x} \left[\frac{1}{t} - \frac{5}{6}t + t \varepsilon(t) \right] dt = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt - \frac{5}{6} \int_x^{2x} t dt + \int_x^{2x} t \varepsilon(t) dt$$

Avec : $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

On a :

- $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_x^{2x} = \ln|2x| - \ln|x| = \ln 2$.
- $\int_x^{2x} t dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_x^{2x} = \frac{1}{2}(2x)^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
- $\left| \int_x^{2x} t \varepsilon(t) dt \right| \leq \int_x^{2x} |t \varepsilon(t)| dt = \int_x^{2x} t |\varepsilon(t)| dt$. Comme $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$, on peut affirmer que pour un réel ε strictement positif donné, il existe un réel α strictement positif tel que : $|t| \leq \alpha \Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. Comme $|t| \leq 2x$, on a : $x \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$.

Il vient alors : $\int_x^{2x} t |\varepsilon(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^{2x} t dt = \frac{3}{2} \varepsilon x^2$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

Finalement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \varphi(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \left[\frac{1}{t} - \frac{5}{6}t + o(t) \right] dt = \ln 2.$$

Résultat final

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{\cos t \times \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \times \sinh t} dt = \ln 2$$