On donne : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Convergence et calcul de : $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt$.

Analyse

L'analyse de l'intégrande (strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$) au voisinage de 0 (limite) et de $+\infty$ (majoration) permet rapidement de conclure à la convergence. Pour le calcul proprement dit, la dérivée de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ doit faire penser à une intégration par parties.

Résolution

Notons d'abord que l'on a, pour tout réel t strictement positif : $t^2 > 0$, donc $e^{t^2} > 1$ puis $0 < e^{-t^2} < 1$. D'où : $0 < 1 - e^{-t^2} < 1$ et enfin : $0 < \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} < \frac{1}{t^2}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ prend donc des valeurs strictement positives.

Comme on a classiquement : $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$, il vient : $e^{-t^2} \underset{0}{\sim} 1-t^2$ puis $1-e^{-t^2} \underset{0}{\sim} t^2$ et enfin : $\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} \underset{0}{\sim} 1$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} = 1$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2} dt$ est donc faussement impropre en 0.

Pour le comportement en $+\infty$, on peut utiliser l'inégalité $\frac{1-e^{-t^2}}{t^2} < \frac{1}{t^2}$ et rappeler que la fonction de référence $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel strictement positif. On en déduit alors que la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}$ est également intégrable sur tout intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel strictement positif.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ est convergente.

Soit maintenant a un réel strictement positif quelconque fixé et x et y deux réels strictement positifs tels que : $0 < x < a < y$.

Intéressons-nous à l'intégrale : $\int_x^a \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$.

Nous pouvons procéder à une intégration par parties :

$$u : t \mapsto 1-e^{-t^2} \text{ donne } u' : t \mapsto 2te^{-t^2}$$
$$v' : t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ dont une primitive est } v : t \mapsto -\frac{1}{t}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_x^a \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt &= \left[\left(1-e^{-t^2}\right)\times\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_x^a - \int_x^a 2te^{-t^2}\times\left(-\frac{1}{t}\right)dt \\
&= \left[-\frac{1-e^{-t^2}}{t}\right]_x^a + 2\int_x^a e^{-t^2}\,dt \\
&= -\frac{1-e^{-a^2}}{a} + \frac{1-e^{-x^2}}{x} + 2\int_x^a e^{-t^2}\,dt
\end{aligned}$$

On a : $1-e^{-x^2} \underset{0}{\sim} x^2$ et donc $\frac{1-e^{-x^2}}{x} \underset{0}{\sim} x$. D'où : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-e^{-x^2}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$.

On en déduit : $\int_0^a \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = -\frac{1-e^{-a^2}}{a} + 2\int_0^a e^{-t^2}\,dt$.

En procédant de façon analogue, on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^y \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt &= \left[-\frac{1-e^{-t^2}}{t}\right]_a^y + 2\int_a^y e^{-t^2}\,dt \\
&= -\frac{1-e^{-y^2}}{y} + \frac{1-e^{-a^2}}{a} + 2\int_a^y e^{-t^2}\,dt
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{y\to+\infty} e^{-y^2} = 0$, il vient $\lim_{y\to+\infty} \frac{1-e^{-y^2}}{y} = 0$ puis :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \frac{1-e^{-a^2}}{a} + 2\int_a^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

Les deux résultats ci-dessus nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt &= \int_0^{a}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt+\int_a^{+\infty}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt\\ &= \cancel{-\frac{1-e^{-a^2}}{a}}+2\int_0^{a}e^{-t^2}dt+\cancel{\frac{1-e^{-a^2}}{a}}+2\int_a^{+\infty}e^{-t^2}dt\\ &= 2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

Soit finalement, en tenant compte de $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt=\sqrt{\pi}$.

Résultat final

L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt$ est convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-t^2}}{t^2}dt=\sqrt{\pi}$$