Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=l \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

Pour tout réel a strictement positif, on pose :

$$g(a)=\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}dt$$

1. Convergence et calcul de $g(a)$.

2. Application : calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$.

Analyse

On s'intéressera fondamentalement, pour un réel c quelconque fixé strictement positif, aux limites de $F(x)=\int_c^x \frac{f(at)-f(t)}{t}dt$ en 0 et en $+\infty$. Le « découpage » de l'intégrale (par linéarité) s'avère alors intéressant si on se ramène, in fine, à une seule et même intégrande… Dans l'application, on se ramènera, comme il se doit, à la situation de la question 1.

Résolution

Question 1.

Soit c un réel strictement positif quelconque fixé. Pour tous x et y strictement positifs tels que : $0 < x < c < y$, on considère l'intégrale

$$\int_x^y \frac{f(at)-f(t)}{t}dt=\int_x^c \frac{f(at)-f(t)}{t}dt+\int_c^y \frac{f(at)-f(t)}{t}dt$$

En effectuant, le cas échéant, le changement de variable $u = at$ (qui donne $du = adt$), il vient :

$$\begin{aligned}\int_x^c \frac{f(at)-f(t)}{t}dt &= \int_x^c \frac{f(at)}{t}dt - \int_x^c \frac{f(t)}{t}dt \\ &= \int_{ax}^{ac} \frac{f(t)}{t}dt + \int_c^x \frac{f(t)}{t}dt \\ &= \int_{ax}^{x} \frac{f(t)}{t}dt + \cancel{\int_x^{ac} \frac{f(t)}{t}dt} + \int_c^{ac} \frac{f(t)}{t}dt + \cancel{\int_{ac}^{x} \frac{f(t)}{t}dt} \\ &= \int_{ax}^{x} \frac{f(t)}{t}dt + \int_c^{ac} \frac{f(t)}{t}dt\end{aligned}$$

Comme on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(t) = l$, on considère :

$$\int_{ax}^{x} \frac{l}{t}dt = l\left[\ln t\right]_{ax}^{x} = l\times\left(\ln x - \ln(ax)\right) = l\times\ln\frac{x}{ax} = l\times\ln\frac{1}{a} = -l\times\ln a$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour t suffisamment petit, on a : $\left|f(t)-l\right| < \varepsilon$ et donc :

$$\left|\int_{ax}^{x} \frac{f(t)-l}{t}dt\right| \le \int_{\min(x,ax)}^{\max(x,ax)} \left|\frac{f(t)-l}{t}\right| dt = \int_{\min(x,ax)}^{\max(x,ax)} \frac{\left|f(t)-l\right|}{t}dt \le \varepsilon\times\int_{\min(x,ax)}^{\max(x,ax)} \frac{1}{t}dt = \varepsilon\times\left|\ln a\right|$$

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left|\int_{ax}^{x} \frac{f(t)-l}{t}dt\right| = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{ax}^{x} \frac{f(t)}{t}dt = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{ax}^{x} \frac{l}{t}dt = -l\times\ln a$.

Finalement :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^c \frac{f(at)-f(t)}{t}dt &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\int_{ax}^{x} \frac{f(t)}{t}dt + \int_c^{ac} \frac{f(t)}{t}dt\right) \\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\int_{ax}^{x} \frac{f(t)}{t}dt\right) + \int_c^{ac} \frac{f(t)}{t}dt \\ &= -l\times\ln a + \int_c^{ac} \frac{f(t)}{t}dt\end{aligned}$$

On procède de façon similaire en $+\infty$.

On obtient d'abord : $\int_c^y \frac{f(at)-f(t)}{t}dt = \int_y^{ay} \frac{f(t)}{t}dt + \int_{ac}^{c} \frac{f(t)}{t}dt$.

Comme on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t)=L$, on considère :

$$\int_y^{ay}\frac{L}{t}dt=L\left[\ln t\right]_y^{ay}=l\times\left(\ln(ay)-\ln y\right)=L\times\ln\frac{ay}{y}=L\times\ln a$$

Soit alors $\varepsilon>0$. Pour t suffisamment grand, on a : $\left|f(t)-l\right|<\varepsilon$ et donc :

$$\left|\int_y^{ay}\frac{f(t)-L}{t}dt\right|\le\int_{\min(y,ay)}^{\max(y,ay)}\left|\frac{f(t)-L}{t}\right|dt=\int_{\min(y,ay)}^{\max(y,ay)}\frac{\left|f(t)-L\right|}{t}dt\le\varepsilon\times\int_{\min(y,ay)}^{\max(y,ay)}\frac{1}{t}dt=\varepsilon\times\left|\ln a\right|$$

On en déduit : $\lim\limits_{y\to+\infty}\left|\int_y^{ay}\frac{f(t)-L}{t}dt\right|=0$ et donc $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_y^{ay}\frac{f(t)}{t}dt=\lim\limits_{y\to+\infty}\int_y^{ay}\frac{L}{t}dt=L\times\ln a$.

Finalement :

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}\int_c^y\frac{f(at)-f(t)}{t}dt&=\lim_{y\to+\infty}\left(\int_y^{ay}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{ac}^{c}\frac{f(t)}{t}dt\right)\\&=\lim_{y\to+\infty}\left(\int_y^{ay}\frac{f(t)}{t}dt\right)+\int_{ac}^{c}\frac{f(t)}{t}dt\\&=L\times\ln a+\int_{ac}^{c}\frac{f(t)}{t}dt\end{aligned}$$

Des deux résultats précédents, on tire la convergence de l'intégrale et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}dt&=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\int_x^c\frac{f(at)-f(t)}{t}dt+\lim_{y\to+\infty}\int_c^y\frac{f(at)-f(t)}{t}dt\\&=\left(-l\times\ln a+\cancel{\int_c^{ac}\frac{f(t)}{t}dt}\right)+\left(L\times\ln a+\cancel{\int_{ac}^{c}\frac{f(t)}{t}dt}\right)\\&=(L-l)\times\ln a\end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}dt$ converge et on a :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(t)}{t}dt=(L-l)\times\ln a}$$

Question 2.

Dans un premier temps, établissons l'existence de $\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt$.

Posons $\varphi(t)=\dfrac{t-1}{\ln t}$ et notons immédiatement que l'on a : $\forall t\in\left]0\,;1\right[,\ \varphi(t)>0$.

On a : $\varphi(t)=\dfrac{t-1}{\ln t}\underset{0}{\sim}\dfrac{-1}{\ln t}$.

Pour tout α dans $\left]0\,;1\right[$, $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{t-1}{\ln t}dt$ est donc une intégrale de Bertrand convergente (on peut « retrouver » ce résultat en montrant facilement que l'on a, au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{\ln t}=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$).

Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\varphi(t)=\lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\frac{t-1}{\ln t}=\lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\frac{1}{\frac{\ln t}{t-1}}=\lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\frac{1}{\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}}=\frac{1}{\frac{1}{1}}=1$.

L'intégrale est donc faussement impropre en 1.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt$ converge.

Effectuons alors le changement de variable : $u=u(t)=\ln t$ qui donne $du=\dfrac{dt}{t}$, soit : $dt=e^u du$. Il vient : $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt=\int_{-\infty}^0\frac{e^u-1}{u}e^u du$.

Puis : $\theta=\theta(u)=-u$ donne : $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt=\int_{-\infty}^0\frac{e^u-1}{u}e^u du=\int_{+\infty}^0\frac{e^{-\theta}-1}{\theta}e^{-\theta}d\theta=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\theta}-e^{-2\theta}}{\theta}d\theta$.

On est ainsi ramené à la situation de la première question avec $f(t)=e^{-2t}$ et $a=\dfrac{1}{2}$

On a, au voisinage de 0 : $e^{-t}-e^{-2t}=\big(1-t+\mathrm{o}(t)\big)-\big(1-2t+\mathrm{o}(t)\big)=t+\mathrm{o}(t)$. On en déduit immédiatement : $\dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}=1+\mathrm{o}(1)$, d'où : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}=1=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(t)=l$.

Par ailleurs : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}e^{-2t}=0$, d'où : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}=0=\lim_{t\to+\infty}f(t)=L$.

Finalement : $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\theta}-e^{-2\theta}}{\theta}d\theta=(L-l)\times\ln a=(0-1)\times\ln\frac{1}{2}=\ln 2$.

$$\boxed{\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}dt=\ln 2}$$