

Soit Γ l'arc paramétré défini par :

$$\mathbf{M}(t) \begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

Calculer, lorsque c'est possible, la courbure et le centre de courbure en $\mathbf{M}(t)$.

Analyse

L'arc est défini en coordonnées cartésiennes. On dispose des formules classiques permettant de calculer la courbure et de positionner le centre de courbure (dans le repère de Frenet). Attention au fait que l'on se doit de travailler en des points biréguliers ...

Résolution

On remarque d'abord que les fonctions x et y sont 2π -périodiques. Par ailleurs, la fonction x est paire et la fonction y est impaire (l'arc est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses). On peut donc limiter les variations du paramètre t à l'intervalle $[0; \pi]$.

Pour tout réel t de l'intervalle $[0; \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\sin t - 2\sin(2t) = -2(\sin t + 2\sin t \cos t) = -2\sin t(1 + 2\cos t) \\ y'(t) &= 2\cos t - 2\cos(2t) = -2(2\cos^2 t - \cos t - 1) = -2(\cos t - 1)(2\cos t + 1) \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[0; \pi]$, on a :

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow -2(\cos t - 1)(2\cos t + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 1 \text{ ou } \cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3}$$

Par ailleurs :

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow -2\sin t(1 + 2\cos t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ ou } \cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \pi \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3}$$

En définitive, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \frac{2\pi}{3}$$

Les trois points non réguliers de l'arc correspondent donc aux valeurs $0, \frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ du paramètre t (modulo 2π). En d'autres termes : $M(t)$ est régulier si, et seulement si : $t \neq \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

On a ensuite :

$$\begin{aligned} x''(t) &= -2 \sin t (1 + 2 \cos t) = -2 [\cos t (1 + 2 \cos t) - 2 \sin^2 t] = -2 (\cos t + 2 \cos(2t)) \\ y''(t) &= -2 [-\sin t (2 \cos t + 1) - 2 \sin t (\cos t - 1)] = -2 (\sin t - 2 \sin(2t)) \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \det(M'(t), M''(t)) &= \begin{vmatrix} -2 \sin t (1 + 2 \cos t) & -2 (\cos t + 2 \cos(2t)) \\ -2 (\cos t - 1) (2 \cos t + 1) & -2 (\sin t - 2 \sin(2t)) \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} \sin t (1 + 2 \cos t) & \cos t + 2 \cos(2t) \\ (\cos t - 1) (2 \cos t + 1) & \sin t - 2 \sin(2t) \end{vmatrix} \\ &= 4 [\sin t (1 + 2 \cos t) (\sin t - 2 \sin(2t)) - (\cos t - 1) (2 \cos t + 1) (\cos t + 2 \cos(2t))] \\ &= 4 [(\sin t + \sin(2t)) (\sin t - 2 \sin(2t)) + (\cos t - \cos(2t)) (\cos t + 2 \cos(2t))] \\ &= 4 [\sin^2 t - \sin t \sin(2t) - 2 \sin^2(2t) + \cos^2 t + \cos t \cos(2t) - 2 \cos^2(2t)] \\ &= 4 [\sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin^2(2t) - 2 \cos^2(2t) + \cos t \cos(2t) - \sin t \sin(2t)] \\ &= 4 (1 - 2 + \cos(2t + t)) \\ &= 4 (\cos(3t) - 1) \end{aligned}$$

On a immédiatement :

$$\det(M'(t), M''(t)) = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) = 1 \Leftrightarrow t = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, les points réguliers obtenus ci-dessus sont en fait des points biréguliers en lesquels la courbure c sera non nulle.

On a :

$$\begin{aligned}\|M'(t)\| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \\ &= \sqrt{[-2(\sin t + \sin(2t))]^2 + [2(\cos t - \cos(2t))]^2} \\ &= 2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2(2t) + \cos^2(2t) + \sin t \sin(2t) - \cos t \cos(2t)} \\ &= 2\sqrt{2 - 2\cos(3t)} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(3t)}\end{aligned}$$

Il vient finalement :

$$\begin{aligned}c(t) &= \frac{\det(M'(t), M''(t))}{\|M'(t)\|} \\ &= \frac{4(\cos(3t) - 1)}{(2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(3t)})^3} \\ &= \frac{4(\cos(3t) - 1)}{8 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(3t)}(1 - \cos(3t))} \\ &= \frac{-1}{4\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(3t)}}\end{aligned}$$

$$c(t) = \frac{-1}{4\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(3t)}}$$

On a alors, en notant le centre de courbure Ω : $\overline{M\Omega} = \frac{1}{c} \vec{N}$.

Rappelons que l'on a, en un point régulier : $\vec{T} = \frac{d\overline{OM}}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|}$.

D'après ce qui précède, il vient :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{-2\sin t - 2\sin(2t)}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(3t)}} \\ \frac{2\cos t - 2\cos(2t)}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(3t)}} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{N} \begin{vmatrix} -2 \cos t + 2 \cos(2t) \\ 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(3t)} \\ -2 \sin t - 2 \sin(2t) \\ 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(3t)} \end{vmatrix}$$

Puis :

$$\frac{1}{c} \vec{N} \begin{vmatrix} -4\sqrt{2} \times \sqrt{1-\cos(3t)} \times \frac{-2 \cos t + 2 \cos(2t)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(3t)}} = 4 \cos t - 4 \cos(2t) \\ -4\sqrt{2} \times \sqrt{1-\cos(3t)} \times \frac{-2 \sin t - 2 \sin(2t)}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(3t)}} = 4 \sin t + 4 \sin(2t) \end{vmatrix}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \overline{M\Omega} &= \frac{1}{c} \vec{N} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\Omega} = 2 \cos t + \cos(2t) + 4 \cos t - 4 \cos(2t) \\ y_{\Omega} = 2 \sin t - \sin(2t) + 4 \sin t + 4 \sin(2t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\Omega} = 6 \cos t - 3 \cos(2t) \\ y_{\Omega} = 6 \sin t + 3 \sin(2t) \end{cases} \end{aligned}$$

En tout point birégulier de l'arc, le centre de courbure de l'arc est donné par :

$$\Omega \begin{vmatrix} 6 \cos t - 3 \cos(2t) \\ 6 \sin t + 3 \sin(2t) \end{vmatrix}$$

Résultat final

Les points de l'arc Γ défini par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

sont biréguliers pour $t \neq \frac{2k\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$). En un tel point la courbure est donnée par :

$$c(t) = \frac{-1}{4\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos(3t)}}$$

et le centre de courbure Ω :

$$\Omega \begin{cases} 6 \cos t - 3 \cos(2t) \\ 6 \sin t + 3 \sin(2t) \end{cases}$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de l'arc Γ (en bleu) et, en un de ses points biréguliers, le cercle osculateur (en rouge) à l'arc en ce point, c'est-à-dire le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{1}{c}$.

