Soit Γ l'arc paramétré défini en coordonnées polaires par :

$$r(\theta)=e^{\theta}$$

Calculer, lorsque c'est possible, la courbure et le centre de courbure en $\mathrm{M}(\theta)$. Préciser le lieu des centres de courbure.

Analyse

L'arc est défini en coordonnées polaires. On note immédiatement que le rayon $r(\theta)$ ne peut s'annuler et on établit facilement que tous les points de l'arc sont biréguliers.

Résolution

On note d'abord que r est définie pour toute valeur de θ.

Par ailleurs, on a immédiatement : $r(\theta)=r'(\theta)=r''(\theta)=e^{\theta}$.

Alors : $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta}=r'(\theta)\vec{u}_{\theta}+r(\theta)\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}=e^{\theta}\left(\vec{u}_{\theta}+\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$ qui donne $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta}\right\|=\sqrt{2}e^{\theta}$.

Et $\dfrac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta^2}=e^{\theta}\left(\vec{u}_{\theta}+\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)+e^{\theta}\left(\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}+\vec{u}_{\theta+\pi}\right)=2e^{\theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$.

D'où :

$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta},\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta^2}\right)=\begin{vmatrix}e^{\theta} & 0\\ e^{\theta} & 2e^{\theta}\end{vmatrix}=2e^{2\theta}$$

On en déduit immédiatement que tous les points de l'arc sont biréguliers.

Il vient alors :

$$c(\theta)=\frac{(r(\theta))^2+2(r'(\theta))^2-r(\theta)r'(\theta)}{\left[(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\det\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta},\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta^2}\right)}{\left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta}\right\|^3}$$

$$=\frac{2e^{2\theta}}{2^{\frac{3}{2}}e^{3\theta}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\theta}}$$

$$\boxed{c(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\theta}}}$$

D'où le rayon de courbure $\mathrm{R}(\theta)$:

$$\boxed{\mathrm{R}(\theta)=\sqrt{2}e^{\theta}}$$

Le centre de courbure Ω est donné par la relation $\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}=\mathrm{R}\vec{\mathrm{N}}$.

En tenant compte de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=r(\theta)\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta}=r'(\theta)\vec{u}_\theta+r(\theta)\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$, on a :

$$\vec{\mathrm{T}}=\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{ds}=\frac{d\theta}{ds}\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{d\theta}=\frac{1}{\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}}\left[r'(\theta)\vec{u}_\theta+r(\theta)\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right]$$

Ici : $\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}=\sqrt{2e^{2\theta}}=\sqrt{2}e^{\theta}$. D'où :

$$\vec{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{\theta}}\left(e^{\theta}\vec{u}_\theta+e^{\theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_\theta+\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$$

Le vecteur étant l'image du vecteur $\vec{\mathrm{T}}$ par la rotation d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\vec{\mathrm{N}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}+\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}+\vec{u}_{\theta+\pi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{u}_\theta+\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$$

Puis :

$$\vec{\text{RN}} = \sqrt{2}e^{\theta} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{u}_{\theta} + \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right) = e^{\theta}\left(-\vec{u}_{\theta} + \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$$

Finalement :

$$\overrightarrow{\text{M}\Omega} = \vec{\text{RN}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{O}\Omega} = \overrightarrow{\text{OM}} + \vec{\text{RN}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{O}\Omega} = e^{\theta}\vec{u}_{\theta} + e^{\theta}\left(-\vec{u}_{\theta} + \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{O}\Omega} = e^{\theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{O}\Omega} = e^{\theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}}$$

On en tire immédiatement que le point $\Omega = \Omega(\theta)$ est l'image du point $\text{M} = \text{M}(\theta)$ par la rotation de centre O et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$.

On a : $\overrightarrow{\text{O}\Omega} = e^{\theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}} = e^{\alpha-\frac{\pi}{2}}\vec{u}_{\alpha}$ avec $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que le point Ω appartient à l'arc d'équation $r(\theta) = e^{\theta-\frac{\pi}{2}}$, obtenu comme image de l'arc Γ par la rotation de centre O et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$.

Réciproquement, tout point P de l'arc d'équation polaire $r(\theta) = e^{\theta-\frac{\pi}{2}}$ est centre de courbure d'un point de l'arc Γ : ce point est l'image de P par la rotation de centre O et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

L'ensemble des centres de courbure de l'arc Γ est l'arc image de Γ par la rotation de centre O et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$. Il admet pour équation polaire : $r(\theta) = e^{\theta-\frac{\pi}{2}}$.

Résultat final

Les points de l'arc Γ défini par :

$$r(\theta) = e^{\theta}$$

sont tous biréguliers. En un point quelconque $\mathrm{M}(\theta)$ de cet arc, la courbure est donnée par :

$$c(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\theta}}$$

et le centre de courbure Ω :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} = e^{\theta}\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de l'arc Γ (en bleu) et, en un de ses points biréguliers, le cercle osculateur (en rouge) à l'arc en ce point, c'est-à-dire le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}e^{\theta}$. On a également (en vert) l'ensemble des centres de courbure.