Soit Γ l'arc paramétré défini par :

$$M(t)\left|\begin{array}{l} x(t)=3t-t^3 \\ y(t)=3t^2 \end{array}\right.$$

Déterminer, en tout point M de Γ la courbure et le centre de courbure.

Analyse

Exercice direct d'application du cours. Dans un premier temps, on vérifie que l'arc est régulier. On utilise ensuite les formules du cours pour calculer la courbure et les coordonnées du centre de courbure (le calcul des coordonnées des deux premiers vecteurs dérivés ne pose aucun problème).

Résolution

On a immédiatement : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left|\begin{array}{l} x'(t)=3-3t^2 \\ y'(t)=6t \end{array}\right.$.

On a alors : $x'(t)=0 \Leftrightarrow 3-3t^2=0 \Leftrightarrow 1-t^2=0 \Leftrightarrow t=-1 \text{ ou } t=1$ et $y'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$.

Ainsi, on a : $\forall t\in\mathbb{R}, \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\neq\vec{0}$. L'arc Γ est régulier.

Pour toute valeur de t, la courbure sera égale à : $c=\dfrac{\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt},\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|^3}$.

A partir de $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left|\begin{array}{l} x'(t)=3-3t^2 \\ y'(t)=6t \end{array}\right.$, on a : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\left|\begin{array}{l} x''(t)=-6t \\ y''(t)=6 \end{array}\right.$.

D'où : $\det\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt},\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)=\begin{vmatrix} 3-3t^2 & -6t \\ 6t & 6 \end{vmatrix}=18(1-t^2)+36t^2=18(1+t^2)$.

On a : $\forall t\in\mathbb{R}, 18(1+t^2)\neq 0$. On en déduit que tous les points de l'arc sont biréguliers.

Il vient ensuite :

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|^3=\left(\left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|^2\right)^{\frac{3}{2}}=\left[\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=\left[9\left(1-t^2\right)^2+36t^2\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$=9^{\frac{3}{2}}\left[\left(1-t^2\right)^2+4t^2\right]^{\frac{3}{2}}=27\left[\left(1+t^2\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=27\left(1+t^2\right)^3$$

Ainsi :

$$c=\frac{\det\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt},\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\right)}{\left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|^3}=\frac{18\left(1+t^2\right)}{27\left(1+t^2\right)^3}=\frac{2}{3\left(1+t^2\right)^2}$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ c=\frac{2}{3\left(1+t^2\right)^2}}$$

Le centre de courbure Ω est donné par la relation $\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}=\mathrm{R}\vec{\mathrm{N}}$ où $R=\frac{1}{c}=\frac{3}{2}\left(1+t^2\right)^2$.

On a, en notant classiquement s l'abscisse curviligne : $ds=\left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|dt=3\left(1+t^2\right)dt$.

Alors : $\vec{\mathrm{T}}=\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{ds}=\frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}=\frac{1}{3\left(1+t^2\right)}\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}$.

A partir de $\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\left|\begin{array}{l}x'(t)=3-3t^2\\ y'(t)=6t\end{array}\right.$, il vient alors : $\vec{\mathrm{T}}=\frac{1}{3\left(1+t^2\right)}\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\left|\begin{array}{l}\frac{3-3t^2}{3\left(1+t^2\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \frac{6t}{3\left(1+t^2\right)}=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right.$.

Il vient immédiatement : $\mathrm{R}\vec{\mathrm{N}}\left|\begin{array}{l}\frac{-2t}{1+t^2}\times\frac{3}{2}\left(1+t^2\right)^2=-3t\left(1+t^2\right)\\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\times\frac{3}{2}\left(1+t^2\right)^2=\frac{3}{2}\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)\end{array}\right.$ puis :

$$\Omega\left|\begin{array}{l}3t-t^3-3t\left(1+t^2\right)=-4t^3\\ 3t^2+\frac{3}{2}\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)=\frac{1}{2}\left(-t^4+6t^2+3\right)\end{array}\right.$$

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ \Omega\left|\begin{array}{l}-4t^3\\ \frac{1}{2}\left(-t^4+6t^2+3\right)\end{array}\right.}$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de l'arc Γ (en bleu) et, en un de ses points biréguliers, le cercle osculateur (en rouge) à l'arc en ce point, c'est-à-dire le cercle de centre Ω et de rayon $R = \frac{1}{c} = \frac{3}{2}\left(1+t^2\right)^2$. On a également représenté (en vert) l'ensemble des centres de courbure.