Soit Γ la courbe paramétrée définie par :

$$\mathrm{M}(t)\left|\begin{array}{l} x(t)=t-\cosh(t)\times\sinh(t) \\ y(t)=2\cosh(t) \end{array}\right.$$

Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}$.

Analyse

Exercice direct d'application du cours. A partir des coordonnées du vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}$, on obtient facilement sa norme $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|$ et il convient alors d'effectuer un calcul intégral.

Résolution

On a immédiatement : $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\left|\begin{array}{l} x'(t)=1-\sinh^2(t)-\cosh^2(t) \\ y'(t)=2\sinh(t) \end{array}\right.$ soit, en tenant compte de la relation $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$: $\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\left|\begin{array}{l} x'(t)=-2\sinh^2(t) \\ y'(t)=2\sinh(t) \end{array}\right.$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|^2 &= \left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=\left(-2\sinh^2(t)\right)^2+\left(2\sinh(t)\right)^2 \\ &= 4\left(\sinh^4(t)+\sinh^2(t)\right)=4\sinh^2(t)\left(\sinh^2(t)+1\right) \\ &= 4\sinh^2(t)\cosh^2(t)=\left(2\sinh(t)\cosh(t)\right)^2 \\ &= \left(\sinh(2t)\right)^2\end{aligned}$$

Finalement : $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right\|=\left|\sinh(2t)\right|$.

En notant $l\left(\overparen{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}\right)$ la longueur de l'arc $\overparen{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}$, il vient alors :

$$\begin{aligned}
l\left(\overparen{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}\right) &= \left|\int_0^t \left\|\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{du}\right\| du\right| = \left|\int_0^t \left|\sinh(2u)\right| du\right| = \left|\int_0^t \sinh(2u)\, du\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{2}\cosh(2u)\right]_0^t\right| = \frac{1}{2}\cosh(2t) - \frac{1}{2}\cosh(0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh(2t)-1\right) = \frac{1}{2}\times 2\sinh^2(t) \\
&= \sinh^2(t)
\end{aligned}$$

Pour la courbe paramétrée définie par :

$$\mathrm{M}(t)\left|\begin{array}{l} x(t) = t - \cosh(t)\sinh(t) \\ y(t) = 2\cosh(t) \end{array}\right.$$

la longueur $l\left(\overparen{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}\right)$ de l'arc $\overparen{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}$ vaut :

$$l\left(\overparen{\mathrm{M}(0)\mathrm{M}(t)}\right) = \sinh^2(t)$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de l'arc Γ (en bleu).