Soit Γ la courbe paramétrée définie par :

$$M(t)\left| \begin{array}{l} x(t)=2t^3+3t^2 \\ y(t)=3t^2+6t \end{array} \right.$$

1. Montrer que Γ admet un point de rebroussement A (on en précisera l'espèce).
2. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OA}$.

Analyse

Exercice direct d'application du cours. Un point de rebroussement étant un point stationnaire, on commence par déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètres les dérivées des fonctions *x* et *y* s'annulent simultanément. Ensuite, il convient classiquement de déterminer le premier vecteur dérivé non nul et le premier vecteur dérivé qui ne lui est pas lié. Pour la deuxième question, à partir des coordonnées du vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, on obtient facilement sa norme $\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|$ et il convient alors d'effectuer un calcul intégral.

Résolution

Question 1.

On a immédiatement : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left| \begin{array}{l} x'(t)=6t^2+6t=6t(t+1) \\ y'(t)=6t+6=6(t+1) \end{array} \right.$.

On a ainsi : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t(t+1)=0 \\ 6(t+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$.

On a : $x(-1)=2\times(-1)^3+3\times(-1)^2=-2+3=1$ et $y(-1)=3\times(-1)^2+6\times(-1)=3-6=-3$.
D'où :

$$A\left| \begin{array}{l} 1 \\ -3 \end{array} \right.$$

On a alors : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\left|\begin{array}{l}x''(t)=12t+6\\ y''(t)=6\end{array}\right.$ et donc $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(-1)\left|\begin{array}{l}-6\\ 6\end{array}\right.$ qui est, pour $t=-1$, le premier vecteur dérivé non nul. Comme l'ordre de dérivation est pair, on a bien affaire à un point de rebroussement.

Il vient alors $\dfrac{d^3\overrightarrow{OM}}{dt^3}\left|\begin{array}{l}x^{(3)}(t)=12\\ y^{(3)}(t)=0\end{array}\right.$ et donc $\dfrac{d^3\overrightarrow{OM}}{dt^3}(-1)\left|\begin{array}{l}12\\ 6\end{array}\right.$.

Les vecteurs $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(-1)$ et $\dfrac{d^3\overrightarrow{OM}}{dt^3}(-1)$ ne sont pas colinéaires ($x^{(3)}(-1)=-2\times x''(-1)$ mais $y^{(3)}(-1)=-2\times y''(-1)$). On a donc, en reprenant les notations classiques : $p=2$ et $q=3$. Comme 3 est impair, nous avons affaire à un point de rebroussement de 1ère espèce.

$$\boxed{\text{La courbe paramétrée } \Gamma \text{ admet un point de rebroussement de 1ère espèce.}}$$

Question 2.

Comme : $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left|\begin{array}{l}x'(t)=6t(t+1)\\ y'(t)=6(t+1)\end{array}\right.$, il vient :

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|^2=\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=\left(6t(t+1)\right)^2+\left(6(t+1)\right)^2=36(t+1)^2\left(t^2+1\right)$$

D'où : $\left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|=6|t+1|\sqrt{t^2+1}$.

L'origine du repère correspond à la valeur 0 du paramètre *t*. En notant $l\left(\overset{\frown}{OA}\right)$ la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OA}$, on a donc :

$$l\left(\overset{\frown}{OA}\right)=\left|\int_0^{-1}\left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|dt\right|=\left|\int_0^{-1}6|t+1|\sqrt{t^2+1}\,dt\right|=6\int_{-1}^{0}(t+1)\sqrt{t^2+1}\,dt$$

On a : $\int_{-1}^{0}(t+1)\sqrt{t^2+1}\,dt=\int_{-1}^{0}t\sqrt{t^2+1}\,dt+\int_{-1}^{0}\sqrt{t^2+1}\,dt$.

→ Calcul de $\int_{-1}^{0} t\sqrt{t^2+1}\,dt$

Comme la dérivée de la fonction $t \mapsto \left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$ est la fonction $t \mapsto 3t\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}} = 3t\sqrt{t^2+1}$, on a immédiatement :

$$\int_{-1}^{0} t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} 3t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\left[\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\left(1-2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left(1-2\sqrt{2}\right)$$

→ Calcul de $\int_{-1}^{0} \sqrt{t^2+1}\,dt$

On effectue le changement de variable classique (bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) : $t = \sinh(u)$.
On a alors : $dt = \cosh(u)\,du$ et :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \sqrt{t^2+1}\,dt &= \int_{\arg\sinh(-1)}^{0} \sqrt{\left(\sinh(u)\right)^2+1} \times \cosh(u)\,du = \int_{\arg\sinh(-1)}^{0} \cosh(u)\times\cosh(u)\,du \\
&= \int_{\arg\sinh(-1)}^{0} \left(\cosh(u)\right)^2 du = \frac{1}{2}\int_{\arg\sinh(-1)}^{0} \left(\cosh(2u)+1\right)du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh(2u)+u\right]_{\arg\sinh(-1)}^{0} = \frac{1}{2}\left[\sinh(u)\cosh(u)+u\right]_{\arg\sinh(-1)}^{0} \\
&\ \frac{1}{2}\left[\sinh(u)\sqrt{1+\left(\sinh(u)\right)^2}+u\right]_{\arg\sinh(-1)}^{0} \\
&= 0 - \frac{1}{2}\left(\sinh(\ \arg\sinh(-1))\sqrt{1+\left(\sinh(\ \arg\sinh(-1))\right)^2} + \arg\sinh(-1)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-1\times\sqrt{1+(-1)^2} + \arg\sinh(-1)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \arg\sinh(-1)\right)
\end{aligned}$$

Comme : $\arg\sinh(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, on a :

$$\arg\sinh(-1) = \ln\left(-1+\sqrt{(-1)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

D'où : $\int_{-1}^{0} \sqrt{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$.

On a donc :

$$\int_{-1}^{0} (t+1)\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\left(1-2\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) = \frac{1}{6}\left(2-\sqrt{2}-3\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$$

Puis, finalement :

$$l\left(\overset{\frown}{\mathrm{OA}}\right)=6\int_{-1}^{0}(t+1)\sqrt{t^2+1}\,dt=2-\sqrt{2}-3\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Pour la courbe paramétrée définie par :

$$\mathrm{M}(t)\left|\begin{array}{l} x(t)=2t^3+3t^2 \\ y(t)=3t^2+6t \end{array}\right.$$

la longueur $l\left(\overset{\frown}{\mathrm{OA}}\right)$ de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{OA}}$, entre l'origine du repère

et le point de rebroussement de la courbe, vaut :

$$l\left(\overset{\frown}{\mathrm{OA}}\right)=2-\sqrt{2}-3\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous une représentation de la courbe Γ (en bleu) et de sa tangente (en rouge) au point de rebroussement $\mathrm{A}(1\,;-3)$.