Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X)=\frac{X^4+2}{(X-1)^5}$$

Analyse

La fraction rationnelle proposée ne comportant qu'un seul pôle, la décomposition en éléments simples s'obtient grâce à une succession de divisions euclidiennes.

Résolution

On effectue d'abord la division euclidienne de X^4+2 par $X-1$:

$$\begin{array}{r|l}
X^4+2 & X-1 \\ \hline
\underline{-\left(X^4-X^3\right)} & X^3+X^2+X+1 \\
X^3+2 & \\
\underline{-\left(X^3-X^2\right)} & \\
X^2+2 & \\
\underline{-\left(X^2-X\right)} & \\
X+2 & \\
\underline{-\left(X-1\right)} & \\
3 &
\end{array}$$

On a donc : $X^4+2=(X-1)\left(X^3+X^2+X+1\right)+3$.

(on pouvait procéder plus rapidement en notant que l'on a : $X^4+2=\left(X^4-1\right)+3$).

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
X^3+X^2+X+1&=(X-1)\left(X^2+2X+3\right)+4\\
X^2+2X+3&=(X-1)(X+3)+6\\
X+3&=(X-1)+4
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
X^4+2 &= \underline{(X-1)(X^3+X^2+X+1)+3} \\
&= (X-1)\left[(X-1)(X^2+2X+3)+4\right]+3 \\
&= \underline{(X-1)^2(X^2+2X+3)+4(X-1)+3} \\
&= (X-1)^2\left[(X-1)(X+3)+6\right]+4(X-1)+3 \\
&= \underline{(X-1)^3(X+3)+6(X-1)^2+4(X-1)+3} \\
&= (X-1)^3\left[(X-1)+4\right]+6(X-1)^2+4(X-1)+3 \\
&= \underline{(X-1)^4+4(X-1)^3+6(X-1)^2+4(X-1)+3}
\end{aligned}$$

On a : $X^4+2=(X-1)^4+4(X-1)^3+6(X-1)^2+4(X-1)+3$.
D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{X^4+2}{(X-1)^5} &= \frac{(X-1)^4+4(X-1)^3+6(X-1)^2+4(X-1)+3}{(X-1)^5} \\
&= \frac{1}{X-1}+\frac{4}{(X-1)^2}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{4}{(X-1)^4}+\frac{3}{(X-1)^5}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathrm{F}(X)=\frac{X^4+2}{(X-1)^5}=\frac{1}{X-1}+\frac{4}{(X-1)^2}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{4}{(X-1)^4}+\frac{3}{(X-1)^5}$$

Résultat final

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\mathrm{F}(X)=\frac{X^4+2}{(X-1)^5}$ s'écrit :

$$\mathrm{F}(X)=\frac{X^4+2}{(X-1)^5}=\frac{1}{X-1}+\frac{4}{(X-1)^2}+\frac{6}{(X-1)^3}+\frac{4}{(X-1)^4}+\frac{3}{(X-1)^5}$$