Soit $a \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $F \in \mathbb{K}(X)$ avec :

$$F(X) = \frac{1}{R(X)} = \frac{1}{(X-a)^2 Q(X)} \text{ où } Q(a) \neq 0$$

Donner la partie polaire de *F* en *a* en fonction de *Q* puis en fonction de *R*.

Analyse

Comme $Q(a) \neq 0$, *a* est pôle d'ordre 2 de *F*. On peut donc formellement écrire :

$$F(X) = \frac{A}{X-a} + \frac{B}{(X-a)^2} + \frac{S(X)}{Q(X)}$$

$\dfrac{1}{Q(X)}$ et sa dérivée s'écrivent simplement et permettent alors d'obtenir facilement *A* et *B*.

Résolution

A partir de $F(X) = \dfrac{A}{X-a} + \dfrac{B}{(X-a)^2} + \dfrac{S(X)}{Q(X)}$, il vient :

$$\frac{1}{Q(X)} = (X-a)^2 \times F(X) = A \times (X-a) + B + \frac{S(X) \times (X-a)^2}{Q(X)}.$$

Avec $X = a$, on obtient : $\dfrac{1}{Q(a)} = B$.

En dérivant chaque membre de l'égalité $\dfrac{1}{Q(X)} = A \times (X-a) + B + \dfrac{S(X) \times (X-a)^2}{Q(X)}$, il vient :

$$\frac{-Q'(X)}{(Q(X))^2} = A + 2 \times (X-a) \times \frac{S(X)}{Q(X)} + (X-a)^2 \times \left(\frac{S}{Q}\right)'(X)$$

Avec $X=a$ à nouveau, on obtient : $\dfrac{-Q'(a)}{(Q(a))^2}=A$.

Finalement : $F(X)=\dfrac{-Q'(a)}{(Q(a))^2\times(X-a)}+\dfrac{1}{Q(a)\times(X-a)^2}+\dfrac{S(X)}{Q(X)}$.

$$\boxed{F(X)=\frac{-Q'(a)}{(Q(a))^2}\times\frac{1}{X-a}+\frac{1}{Q(a)}\times\frac{1}{(X-a)^2}+\frac{S(X)}{Q(X)}}$$

Disposant de la décomposition précédente, on va chercher à exprimer $B=\dfrac{1}{Q(a)}$ et $A=\dfrac{-Q'(a)}{(Q(a))^2}$ en fonction de R et de certaines de ses dérivées.

On a : $R(X)=(X-a)^2\times Q(X)$.

D'où : $R'(X)=2\times(X-a)\times Q(X)+(X-a)^2\times Q'(X)$.

Puis :

$$\begin{aligned}R''(X)&=2\times Q(X)+2\times(X-a)\times Q'(X)+2\times(X-a)\times Q'(X)+(X-a)^2\times Q''(X)\\&=2\times Q(X)+4\times(X-a)\times Q'(X)+(X-a)^2\times Q''(X)\end{aligned}$$

Il vient alors : $R''(a)=2\times Q(a)$, soit : $B=\dfrac{1}{Q(a)}=\dfrac{2}{R''(a)}$.

En dérivant une nouvelle fois, il vient :

$$\begin{aligned}R'''(X)&=2\times Q'(X)+4\times Q'(X)+4\times(X-a)\times Q''(X)\\&\quad+2\times(X-a)\times Q''(X)+(X-a)^2\times Q'''(X)\\&=6\times Q'(X)+6\times(X-a)\times Q''(X)+(X-a)^2\times Q'''(X)\end{aligned}$$

Il vient alors : $R'''(a)=6\times Q'(a)$, soit $Q'(a)=\dfrac{1}{6}\times R'''(a)$.

D'où :

$$A=\frac{-Q'(a)}{(Q(a))^2}=-Q'(a)\times B^2=-\frac{1}{6}\times R'''(a)\times\left(\frac{2}{R''(a)}\right)^2=-\frac{4}{6}\times\frac{R'''(a)}{(R''(a))^2}=-\frac{2}{3}\times\frac{R'''(a)}{(R''(a))^2}$$

Finalement :

$$\boxed{F(X)=-\frac{2}{3}\times\frac{R'''(a)}{\left(R''(a)\right)^2}\times\frac{1}{X-a}+\frac{2}{R''(a)}\times\frac{1}{(X-a)^2}+\frac{S(X)}{Q(X)}}$$