

Montrer que pour tous réels x et y strictement supérieur à 1, on a :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$$

Indication : on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Analyse

L'énoncé donnant une indication, on s'intéresse à la convexité de la fonction proposée. Celle-ci étant deux fois dérivable et l'étude du signe de la dérivée seconde ne posant pas de difficulté particulière, on peut conclure rapidement.

Résolution

La fonction logarithme népérien est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Elle l'est donc sur $]1; +\infty[$. Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on aura $\ln x > 0$.

On déduit de ce qui précède que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a alors, en posant $u(x) = \ln x$:

$$f'(x) = (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} = (xu(x))^{-1}$$

La fonction $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivable sur cet intervalle. Comme $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$, la fonction $x \mapsto x \ln x$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]1; +\infty[$. On en déduit finalement que

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Pour tout x réel strictement supérieur à 1, il vient :

$$f''(x) = (xu(x))^{-1} = -1 \times [u(x) + xu'(x)](xu(x))^{-2} = -\frac{\ln x + x \times \frac{1}{x}}{(x \ln x)^2} = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$$

On a immédiatement, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

- $\frac{-1}{(x \ln x)^2} < 0$.
- $\ln x > 0$ et donc : $1 + \ln x > 1 > 0$.

En définitive, la dérivée seconde de la fonction f prend des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $]1; +\infty[$. On en déduit que la fonction f est concave sur cet intervalle.

Pour tous réels x et y strictement supérieur à 1, on a alors :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

Soit :

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}\ln(\ln x) + \frac{1}{2}\ln(\ln y) = \frac{1}{2}(\ln(\ln x) + \ln(\ln y)) = \frac{1}{2}\ln(\ln x \ln y) = \ln\sqrt{\ln x \ln y}$$

Soit finalement, en tenant compte de la croissance stricte sur \mathbb{R}_+^* du logarithme népérien :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$$

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

$$\forall (x, y) \in (]1; +\infty[)^2, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$$