Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a :

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Analyse

L'énoncé de la première question nous conduit « assez naturellement » à considérer la fonction pente. Pour ce qui est de la deuxième question, on utilisera le premier résultat en n'oubliant pas que celui-ci n'est valable que pour des réels strictement positifs …

Résolution

Question 1.

La fonction f étant concave sur $\mathbb{R}_+$, nous savons que la fonction pente φ_0 définie par :

$\varphi_0 : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(0)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or, la fonction $x \mapsto -\dfrac{f(0)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit d'une fonction décroissante sur cet intervalle (la fonction inverse) par une constante négative ($-f(0)$, la fonction f prenant des valeurs positives).

Ainsi, si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ était croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors la somme des deux fonctions $x \mapsto -\dfrac{f(0)}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$, c'est-à-dire la fonction φ_0, serait elle-même croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ce qui est absurde d'après ce qui précède.

Finalement :

La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Question 2.

Notons, dans un premier temps, que l'inégalité demandée est trivialement vérifiée pour $x = 0$ ou $y = 0$ (il s'agit d'une égalité).

Nous allons donc travailler maintenant sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit donc *x* et *y* deux réels strictement positifs. Comme ils jouent des rôles symétriques, nous pouvons par exemple supposer : $x \le y$.
On a alors immédiatement : $0 < x \le y \le x + y$.

D'après la question précédente : $y \le x + y \Rightarrow \dfrac{f(x+y)}{x+y} \le \dfrac{f(y)}{y}$.

D'où : $f(x+y) \le (x+y)\dfrac{f(y)}{y} = f(y) + \dfrac{x}{y} f(y) \quad (\mathrm{E})$.

Toujours en utilisant le résultat de la question précédente : $x \le y \Rightarrow \dfrac{f(y)}{y} \le \dfrac{f(x)}{x}$.

Soit : $x\dfrac{f(y)}{y} \le f(x)$, c'est-à-dire : $\dfrac{x}{y} f(y) \le f(x)$.

L'inégalité (E) donne alors : $f(x+y) \le f(y) + \dfrac{x}{y} f(y) \le f(y) + f(x)$.

Le résultat est ainsi établi pour deux réels strictement positifs.

D'après ce que nous avions mentionnés au début de la question, l'inégalité est donc finalement valable pour tout couple de réels positifs.

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ f(x+y) \le f(y) + f(x)}$$