

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que la fonction f est concave, dérivable et croissante sur \mathbb{R}_+ .

1. Montrer que pour tout réel x supérieur à 1, on a :

$$f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$$

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n)$$

$$v_n = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n+1)$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

3. On considère ici pour f la fonction logarithme népérien.

On rappelle que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \gamma$

(constante d'Euler).

Donner un encadrement de γ d'amplitude 10^{-3} .

Analyse

Convexité et suite sont les deux ingrédients de cet exercice qui fait, une fois encore, la part belle à la fonction pente (1^{ère} question) mais sous une forme qui peut dérouter ...

Résolution

Question 1.

La double inégalité à établir peut être écrite :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \leq f'(x) \leq \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)}$$

Cette forme nous fait légitimement penser à la fonction pente ...

Soit x un réel supérieur à 1. La fonction pente φ_x est définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{x\}$ par :

$$\varphi_x : t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

On a alors : $\varphi_x(x+1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$.

Ce qui précède nous conduit alors à considérer un réel quelconque de l'intervalle $]x; x+1]$, réel que nous écrivons $x+h$ avec $h \in]0; 1]$.

Comme la fonction f est concave, la fonction φ_x est décroissante et on a :

$$x+h \leq x+1 \Rightarrow \varphi_x(x+h) \geq \varphi_x(x+1) \Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \geq \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$$

On a donc :

$$\forall h \in]0; 1], \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

D'où, en faisant tendre h vers 0 (par valeurs positives) :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Mais, la fonction f étant dérivable, la limite $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ n'est rien d'autre que le nombre dérivé en x de la fonction f , soit $f'(x)$.

Finalement :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \leq f'(x)$$

On a ainsi obtenu une première des deux inégalités cherchées.

On a ensuite : $\varphi_x(x-1) = \frac{f(x-1) - f(x)}{(x-1) - x} = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)}$ (remarque : c'est à partir de là

que l'hypothèse « $x \geq 1$ » prend tout son sens ...).

Ce qui précède nous conduit alors à considérer un réel quelconque de l'intervalle $[x-1; x[$, réel que nous écrivons $x+h$ avec $h \in [-1; 0[$.

Comme la fonction f est concave, la fonction φ_x est décroissante et on a :

$$x-1 \leq x+h \Rightarrow \varphi_x(x+h) \leq \varphi_x(x-1) \Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} \leq \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)}$$

On a donc :

$$\forall h \in [-1; 0[, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)}$$

D'où, en faisant tendre h vers 0 (par valeurs négatives cette fois) :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)}$$

Mais, la fonction f étant dérivable, la limitée $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ n'est rien d'autre que le nombre dérivé en x de la fonction f , soit $f'(x)$.

Finalement :

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)}$$

On a ainsi obtenu la deuxième des deux inégalités cherchées.

En définitive :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x+1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x-1)$$

Question 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) + f'(n+1) - f(n+1)) - (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n)) \\ &= f'(n+1) - [f(n+1) - f(n)] \end{aligned}$$

La double inégalité obtenue précédemment s'écrit, avec $x = n+1$:

$$f(n+2) - f(n+1) \leq f'(n+1) \leq f(n+1) - f(n)$$

La deuxième inégalité nous permet donc de conclure :

$$u_{n+1} - u_n = f'(n+1) - [f(n+1) - f(n)] \leq 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante.

En utilisant maintenant la première inégalité pour x prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n , on obtient :

$$\begin{aligned}f(2) - f(1) &\leq f'(1) \\f(3) - f(2) &\leq f'(2) \\&\vdots \\f(n) - f(n-1) &\leq f'(n-1) \\f(n+1) - f(n) &\leq f'(n)\end{aligned}$$

En additionnant ces n inégalités membre à membre et en simplifiant, il vient :

$$f(n+1) - f(1) \leq f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n-1) + f'(n) = u_n + f(n)$$

Soit : $f(n+1) - f(n) - f(1) \leq u_n$.

Mais puisque la fonction f est croissante, on a : $f(n+1) - f(n) \geq 0$.

D'où : $-f(1) \leq f(n+1) - f(n) - f(1) \leq u_n$.

Ainsi, la suite (u_n) est minorée par $-f(1)$.

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente.

Reprenons le raisonnement avec la suite (v_n) .

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) + f'(n+1) - f(n+2)) - (f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) - f(n+1)) \\&= f'(n+1) - [f(n+2) - f(n+1)]\end{aligned}$$

La double inégalité obtenue précédemment s'écrit, avec $x = n+1$:

$$f(n+2) - f(n+1) \leq f'(n+1) \leq f(n+1) - f(n)$$

La deuxième inégalité nous permet donc de conclure :

$$v_{n+1} - v_n = f'(n+1) - [f(n+2) - f(n+1)] \geq 0$$

Ainsi, la suite (v_n) est croissante.

En utilisant cette fois la deuxième inégalité pour x prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n , on obtient :

$$\begin{aligned}f'(1) &\leq f(1) - f(0) \\f'(2) &\leq f(2) - f(1) \\&\vdots \\f'(n-1) &\leq f(n-1) - f(n-2) \\f'(n) &\leq f(n) - f(n-1)\end{aligned}$$

En additionnant ces n inégalités membre à membre et en simplifiant, il vient :

$$f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n-1) + f'(n) = v_n + f(n+1) \leq f(n) - f(0)$$

Soit : $v_n \leq f(n) - f(n+1) - f(0)$.

Mais puisque la fonction f est croissante, on a : $f(n) - f(n+1) \leq 0$.

D'où : $v_n \leq f(n) - f(n+1) - f(0) \leq -f(0)$.

Ainsi, la suite (v_n) est majorée par $-f(0)$.

Puisque la suite (v_n) est croissante et majorée, elle est convergente.

Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Question 3.

Ici, on a, pour tout entier naturel n non nul : $u_n - v_n = f(n+1) - f(n) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$.

Par ailleurs, (u_n) et (v_n) sont respectivement décroissante et croissante.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes de limite commune la constante γ .

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_n \leq \gamma \leq u_n$$

Pour obtenir un encadrement de γ d'amplitude 10^{-3} , il suffit alors de choisir le rang n tel que : $u_n - v_n \leq 10^{-3}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}u_n - v_n &\leq 10^{-3} \\ \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\leq 10^{-3} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} &\leq e^{10^{-3}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} &\leq e^{10^{-3}} - 1 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{1}{e^{10^{-3}} - 1}\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{e^{10^{-3}} - 1} \approx 999,5$, on retient $n = 1000$.

A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on obtient facilement :

$$0,576\,716 < v_{1000} \leq \gamma \leq u_{1000} < 0,577\,716$$

$$\gamma \in]0,576\,716; 0,577\,716[$$

Remarque : la convergence est lente et cet encadrement, somme toute, relativement peu précis ($\gamma \approx 0,577\,215\,664\,902$, valeur arrondie à 10^{-12}).