

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - 2$$

Soit  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Etudier les variations de la fonction  $f$  et montrer qu'elle admet un minimum sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Etudier la convexité de la fonction  $f$ .  
On montrera que la fonction  $f$  admet un point d'inflexion  $I$  et on donnera l'équation réduite de la tangente à  $\mathcal{C}$  en ce point.

---

## Analyse

La fonction racine carrée, son inverse et quelques coefficients ... Voilà qui suffit pour mettre l'accent sur les variations et la convexité de cette fonction sans l'étudier complètement (mais n'hésitez pas à titre d'entraînement !). Le travail se fait essentiellement à partir des dérivées première et seconde (leur calcul est lui-même un excellent entraînement ! ☺).

---

## Résolution

### Question 1.

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{(\sqrt{x})^2} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2x-1) = \frac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Comme le réel  $x$  est strictement positif, il en va de même pour  $2x\sqrt{x}$ . Ainsi, le signe de  $f'(x)$  est identique à celui de son numérateur :  $2x-1$ .

On a facilement :  $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$  et  $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ .

On a donc :

- Pour  $x$  dans  $]0; \frac{1}{2}[$ ,  $f'(x) < 0$ .
- Pour  $x$  dans  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .
- $f'(\frac{1}{2}) = 0$ .

On en déduit finalement :

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; \frac{1}{2}[$   
et strictement croissante sur l'intervalle  $]\frac{1}{2}; +\infty[$ .

Décroissante puis croissante, la fonction  $f$  admet donc un minimum (global) pour  $x = \frac{1}{2}$  et on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

La fonction  $f$  admet un minimum en  $x = \frac{1}{2}$  et on a :  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)$ .

### Question 2.

La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme rapport de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel  $x$  strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x\sqrt{x} - (2x-1) \times 2 \left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2x\sqrt{x})^2} = \frac{4x\sqrt{x} - 2(2x-1) \times \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{4x^2 \times x} \\ &= \frac{4x\sqrt{x} - 2(2x-1) \times \frac{3\sqrt{x}}{2}}{4x^3} = \frac{4x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}(2x-1)}{4x^3} = \frac{3\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}}{4x^3} \\ &= \frac{\sqrt{x}(3-2x)}{4x^3} \end{aligned}$$

Comme le réel  $x$  est strictement positif, il en va de même pour le rapport  $\frac{\sqrt{x}}{4x^3}$ . Ainsi, le signe de  $f''(x)$  est identique à celui de :  $3-2x$ .

On a facilement :  $3-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$  et  $3-2x>0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$ .

On a donc :

- Pour  $x$  dans  $]0; \frac{3}{2}[$ ,  $f''(x) > 0$ .
- Pour  $x$  dans  $]\frac{3}{2}; +\infty[$ ,  $f''(x) < 0$ .
- $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ .

On en déduit :

La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $]0; \frac{3}{2}[$  et concave sur l'intervalle  $]\frac{3}{2}; +\infty[$ .

La fonction  $f$  changeant de convexité au point d'abscisse  $\frac{3}{2}$ , nous avons affaire à un point d'inflexion.

On a :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} - 2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{6} - 2 = \frac{\sqrt{6}}{3} + \sqrt{6} - 2 = \frac{4\sqrt{6}}{3} - 2$$

La fonction  $f$  admet pour point d'inflexion le point  $I\left(\frac{3}{2}; \frac{4\sqrt{6}}{3} - 2\right)$ .

L'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  en ce point s'écrit :

$$y = f'\left(\frac{3}{2}\right) \times \left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

On a :

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{2 \times \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

D'où l'équation réduite :

$$\begin{aligned}
 y &= f' \left( \frac{3}{2} \right) \times \left( x - \frac{3}{2} \right) + f \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \left( x - \frac{3}{2} \right) + \frac{4\sqrt{6}}{3} - 2 \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{6}}{3} - 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} x - \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{4\sqrt{6}}{3} - 2 \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} x + \sqrt{6} - 2
 \end{aligned}$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'inflexion  $I \left( \frac{3}{2}; \frac{4\sqrt{6}}{3} - 2 \right)$  s'écrit :

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} x + \sqrt{6} - 2$$

## Complément

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative de la fonction  $f$ , où nous avons fait apparaître le point  $S$  d'abscisse  $\frac{1}{2}$ , valeur pour laquelle la fonction  $f$  admet un minimum (d'où,  $f$  étant dérivable, la présence d'une tangente horizontale) et le point d'inflexion  $I$  ainsi que la tangente en ce point.

