

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont trois réels ($a \neq 0$).

Etudier la convexité de la fonction f sur \mathbb{R} .

Analyse

Un exercice simple pour se familiariser avec l'étude de la convexité non pas d'une mais d'une famille de fonctions. On notera que la dérivée seconde de f est ... très simple !

Résolution

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et pour tout x réel, on a :

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

Ainsi, le signe de $f''(x)$ est constant et identique à celui de a . D'où la discussion :

- Si $a > 0$. Pour tout x réel, $f''(x) > 0$ et la fonction f est convexe sur \mathbb{R} .
- Si $a < 0$. Pour tout x réel, $f''(x) < 0$ et la fonction f est concave sur \mathbb{R} .

Résultat final

Si $a > 0$, la fonction f est convexe sur \mathbb{R} et si $a < 0$, la fonction f est concave sur \mathbb{R} .