Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = -\frac{8}{x} + x^2 - 10x + 33$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition et montrer que la parabole d'équation $y = x^2 - 10x + 33$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
2. Montrer que le point $\mathrm{I}(2\,;13)$ est un point d'inflexion pour f et étudier la convexité de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point I.
4. En vous aidant des éléments précédents, donner l'allure de $\mathscr{C}$.

Analyse

Droite et parabole asymptotes, point d'inflexion, tangente … Voici quelques éléments remarquables qui, une fois précisés, permettent d'obtenir facilement l'allure de la courbe représentative de la fonction étudiée.

Résolution

Question 1.

On doit chercher les limites en 0 à droite et en $+\infty$.

→ En 0 à droite

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-8}{x} = -\infty$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^2 - 10x + 33\right) = 0^2 - 10 \times 0 + 33 = 33$.

D'où (somme) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

→ En $+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8}{x}=0$.
Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-10x+33\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$.
D'où (somme) : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

On a par ailleurs : $f(x)-\left(x^2-10x+33\right)=\frac{-8}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8}{x}=0$.
On a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x^2-10x+33\right)\right]=0$.
On en conclut immédiatement :

La parabole d'équation $y=x^2-10x+33$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Remarque : puisque l'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$, la différence $f(x)-\left(x^2-10x+33\right)=\frac{-8}{x}$ est donc strictement négative et on en conclut que la courbe $\mathscr{C}$ est située sous la parabole asymptote.

Question 2.

La fonction *f* est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (la fonction inverses à un coefficient multiplicatif près et une fonction polynôme) et est donc elle-même dérivable sur cet intervalle. Pour tout réel *x* strictement positif, on a :

$$f'(x)=-8\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2x-10=\frac{8}{x^2}+2x-10$$

La fonction dérivée f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout *x* strictement positif, on a :

$$f''(x)=8\times\left(-\frac{2}{x^3}\right)+2=\frac{-16}{x^3}+2=\frac{2x^3-16}{x^3}=\frac{2\left(x^3-8\right)}{x^3}$$

Pour $x=2$, on a immédiatement $x^3=8$. D'où : $f''(2)=0$.

Le fait que la fonction f'' s'annule pour $x=2$ ne suffit pas pour conclure à la présence d'un point d'inflexion. Il nous faut d'abord étudier le signe de cette fonction.

Puisque $x=2$ annule x^3-8, nous pouvons factoriser par $x-2$:

$$x^3-8=(x-2)(ax^2+bx+c)$$

On a : $(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+(-2a+b)x^2+(-2b+c)x-2c$.

Par identification, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=0 \\ -2b+c=0 \\ -2c=-8 \end{cases}$$

On a facilement :

$$\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=0 \\ -2b+c=0 \\ -2c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2a \\ c=2b \\ c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2b \\ c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$$

Finalement : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ et :

$$f''(x)=\frac{2(x^3-8)}{x^3}=(x-2)\frac{2(x^2+2x+4)}{x^3}$$

Le discriminant associé à x^2+2x+4 vaut $\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12$.
Comme le coefficient de « x^2 » est strictement positif, on en déduit que ce trinôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $x>0 \Rightarrow x^3>0$, le rapport $\dfrac{2(x^2+2x+4)}{x^3}$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ et le signe de $f''(x)$ est identique à celui de $x-2$.

On a :

- Pour tout réel x dans $]0\,;2[$, $x-2<0$ et $f''(x)<0$.
- Pour tout réel x dans $]2\,;+\infty[$, $x-2>0$ et $f''(x)>0$.

La fonction f'' s'annule donc pour $x=2$ en changeant de signe : la dérivée f' admet bien un extremum pour $x=2$. La fonction f admet bien un point d'inflexion pour $x=2$.

On a : $f(2) = -\frac{8}{2} + 2^2 - 10\times 2 + 33 = -4 + 4 - 20 + 33 = 13$.

- Pour tout réel x dans $]0\,;2]$, $f''(x) \leq 0$. La fonction f' est donc décroissante sur cet intervalle. La fonction f y est donc concave.
- Pour tout réel x dans $[2\,;+\infty[$, $f''(x) \geq 0$. La fonction f' est donc croissante sur cet intervalle. La fonction f y est donc convexe.

Conclusion :

La fonction f est concave sur l'intervalle $]0\,;2]$ et convexe sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.
Elle admet pour point d'inflexion le point $\mathrm{I}(2\,;13)$.

Question 3.

L'équation réduite de la tangent à $\mathscr{C}$ au point I s'écrit :

$$y = f'(2)\times(x-2) + f(2)$$

On a : $f'(2) = \frac{8}{2^2} + 2\times 2 - 10 = 2 + 4 - 10 = -4$.

D'où l'équation réduite :

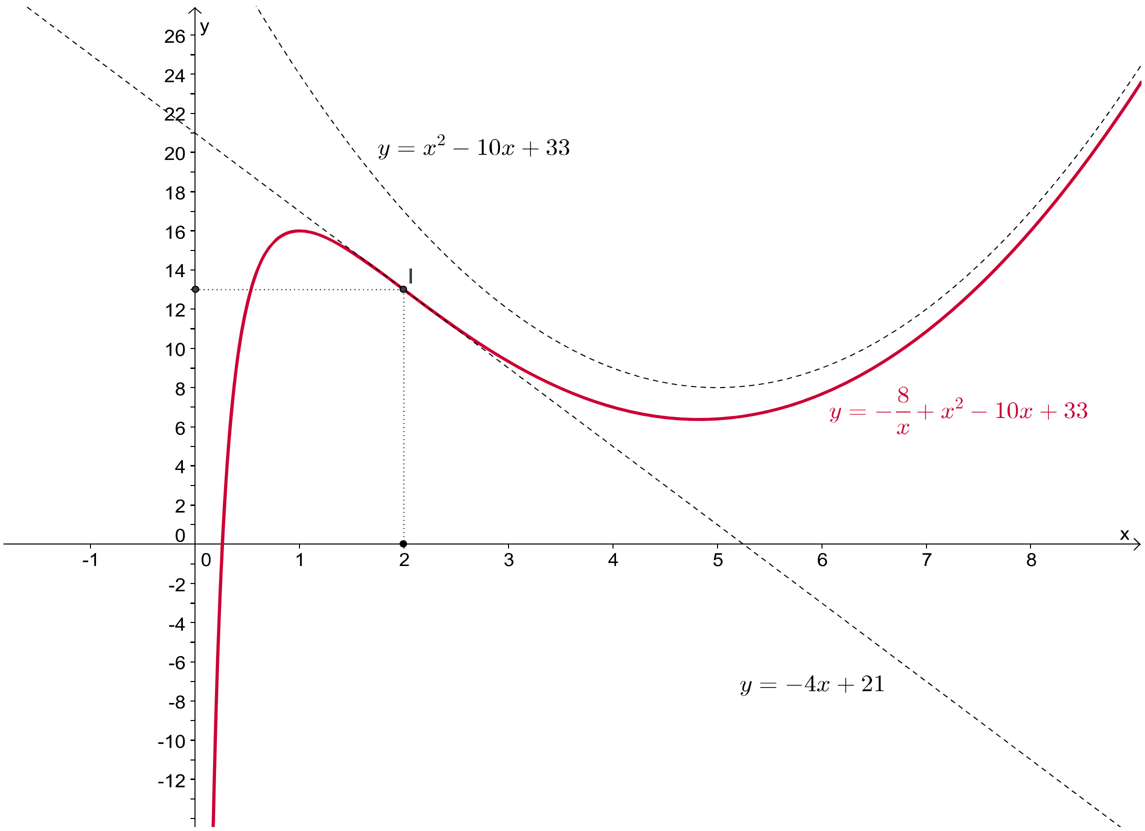
$$y = f'(2)\times(x-2) + f(2) = -4\times(x-2) + 13 = -4x + 8 + 13 = -4x + 21$$

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'inflexion $\mathrm{I}(2\,;13)$ s'écrit :
$y = -4x + 21$

Question 4.

Sur la figure ci-après, nous avons fait apparaître :

- La parabole asymptote d'équation $y = x^2 - 10x + 33$.
- Le point d'inflexion $\mathrm{I}(2\,;13)$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en I d'équation $y = -4x + 21$.
- La courbe $\mathscr{C}$.



y
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
x
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
I
$y = x^2 - 10x + 33$
$y = -\frac{8}{x} + x^2 - 10x + 33$
$y = -4x + 21$