

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels bornée.

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x - a_n|}{3^n}$$

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  est convexe.
3. Montrer que la fonction  $f$  n'est pas dérivable aux points d'abscisses les réels  $a_n$ .

---

## Analyse

Les deux premières questions ne posent pas de difficultés particulières, la deuxième se traitant simplement à partir de la définition de la convexité. La troisième question est un peu plus délicate, des majorations trop rapides ne permettant pas de conclure.

---

## Résolution

### Question 1.

La suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant bornée, il existe un réel positif  $M$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$ .

Soit alors  $x$  un réel quelconque fixé.

La série numérique  $\sum \frac{|x - a_n|}{3^n}$  est une série à terme positif.

Pour tout  $n$  entier naturel, on a :  $\frac{|x - a_n|}{3^n} \leq \frac{|x| + |a_n|}{3^n} \leq \frac{|x| + M}{3^n}$ . Mais la suite  $\sum \frac{|x| + M}{3^n}$  est

convergente car la série géométrique  $\sum \frac{1}{3^n}$  est une série convergente (la raison positive est

strictement inférieure à 1). On en déduit ainsi que la série  $\sum \frac{|x - a_n|}{3^n}$  converge.

Le résultat précédent étant valable pour tout  $x$  réel, on en déduit que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

### Question 2.

Soit  $x$  et  $y$  deux réels et  $t$  un réel de l'intervalle  $[0; 1]$ .

On va comparer  $f(tx + (1-t)y)$  et  $tf(x) + (1-t)f(y)$ .

En remarquant que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$\begin{aligned} |tx + (1-t)y - a_n| &= |tx + (1-t)y - ta_n - (1-t)a_n| \\ &= |t(x - a_n) + (1-t)(y - a_n)| \\ &\leq |t(x - a_n)| + |(1-t)(y - a_n)| \\ &= t|x - a_n| + (1-t)|y - a_n| \end{aligned}$$

il vient :

$$f(tx + (1-t)y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|tx + (1-t)y - a_n|}{3^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t|x - a_n| + (1-t)|y - a_n|}{3^n} = tf(x) + (1-t)f(y)$$

La fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

### Question 3.

Pour fixer les idées, commençons par travailler en  $a_0$ .

Pour tout réel  $h$ , on a :

$$f(a_0 + h) - f(a_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_0 + h - a_n| - |a_0 - a_n|}{3^n} = |h| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_0 + h - a_n| - |a_0 - a_n|}{3^n}$$

$$\text{D'où : } f(a_0 + h) - f(a_0) - |h| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_0 + h - a_n| - |a_0 - a_n|}{3^n}.$$

En tenant compte du fait que l'on a :

$$\left| |a_0 + h - a_n| - |a_0 - a_n| \right| \leq |(a_0 + h - a_n) - (a_0 - a_n)| = |h|$$

il vient :

$$\left| f(a_0 + h) - f(a_0) - |h| \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left| |a_0 + h - a_n| - |a_0 - a_n| \right|}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|h|}{3^n} = \frac{|h|}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{|h|}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{|h|}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{|h|}{2}$$

Finalement :

$$-\frac{|h|}{2} \leq f(a_0 + h) - f(a_0) - |h| \leq \frac{|h|}{2}$$

Pour  $h > 0$ , on a alors :  $-\frac{h}{2} \leq f(a_0 + h) - f(a_0) - h \leq \frac{h}{2}$ .

D'où :

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} &\leq f(a_0 + h) - f(a_0) - h \leq \frac{h}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{h}{2} &\leq f(a_0 + h) - f(a_0) \leq \frac{3h}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq \frac{f(a_0 + h) - f(a_0)}{h} \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La fonction  $f$  étant convexe, elle est dérivable à droite en  $a_0$ . En passant à la limite dans la double inégalité précédemment obtenue, on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a_0 + h) - f(a_0)}{h} \leq \frac{3}{2}$$

Soit :  $\frac{1}{2} \leq f'_d(a_0) \leq \frac{3}{2}$ .

Pour  $h < 0$ , on a cette fois :  $\frac{h}{2} \leq f(a_0 + h) - f(a_0) + h \leq -\frac{h}{2}$ .

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} &\leq f(a_0 + h) - f(a_0) + h \leq -\frac{h}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{h}{2} &\leq f(a_0 + h) - f(a_0) \leq -\frac{3h}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq \frac{f(a_0 + h) - f(a_0)}{h} \leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

La fonction  $f$  étant convexe, elle est dérivable à gauche en  $a_0$ . En passant à la limite dans la double inégalité précédemment obtenue, on obtient :

$$-\frac{3}{2} \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a_0 + h) - f(a_0)}{h} \leq -\frac{1}{2}$$

Soit :  $-\frac{3}{2} \leq f'_g(a_0) \leq -\frac{1}{2}$ .

Comme  $f_g'(a_0) \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$  et  $f_d'(a_0) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ , on a :  $f_g'(a_0) \neq f_d'(a_0)$  et la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $a_0$ .

Soit maintenant  $N$  un entier naturel non nul. Il semble assez « naturel » de reprendre la démarche précédente en travaillant en  $a_N$ .

On a d'abord, pour tout réel  $h$  :

$$f(a_N + h) - f(a_N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} = \frac{|h|}{3^N} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq N}} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n}$$

D'où :

$$f(a_N + h) - f(a_N) - \frac{|h|}{3^N} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq N}} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n}.$$

Il vient alors :

$$\left| f(a_N + h) - f(a_N) - \frac{|h|}{3^N} \right| \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq N}} \frac{\|a_N + h - a_n\| - \|a_N - a_n\|}{3^n} \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq N}} \frac{|h|}{3^n} = |h| \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq N}} \frac{1}{3^n} = |h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right)$$

Finalement :

$$-|h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right) \leq f(a_N + h) - f(a_N) - \frac{|h|}{3^N} \leq |h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right)$$

Pour  $h > 0$  :

$$\begin{aligned} -|h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right) &\leq f(a_N + h) - f(a_N) - \frac{|h|}{3^N} \leq |h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right) \\ \Leftrightarrow -h \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right) &\leq f(a_N + h) - f(a_N) - \frac{h}{3^N} \leq h \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right) \\ \Leftrightarrow -\left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \right) &\leq \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} - \frac{1}{3^N} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} &\leq \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

En passant à la limite, on en déduit :  $-\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} \leq \frac{3}{2}$ .

Soit :  $-\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} \leq f_d'(a_N) \leq \frac{3}{2}$ .

Pour  $h < 0$  :

$$\begin{aligned} -|h|\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3^N}\right) &\leq f(a_N+h)-f(a_N)-\frac{|h|}{3^N} \leq |h|\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3^N}\right) \\ \Leftrightarrow h\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3^N}\right) &\leq f(a_N+h)-f(a_N)+\frac{h}{3^N} \leq -h\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3^N}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{3^N} &\geq \frac{f(a_N+h)-f(a_N)}{h} + \frac{1}{3^N} \geq -\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3^N}\right) \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq \frac{f(a_N+h)-f(a_N)}{h} \leq \frac{3}{2}-\frac{2}{3^N} \end{aligned}$$

En passant à la limite, on en déduit :  $-\frac{3}{2} \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(a_N+h)-f(a_N)}{h} \leq \frac{3}{2}-\frac{2}{3^N}$ .

Soit :  $-\frac{3}{2} \leq f'_g(a_N) \leq \frac{3}{2}-\frac{2}{3^N}$ .

On constate alors que les inégalités obtenues :

$$-\frac{3}{2} \leq f'_g(a_N) \leq \frac{3}{2}-\frac{2}{3^N} \text{ et } -\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} \leq f'_d(a_N) \leq \frac{3}{2}$$

ne permettent pas de conclure puisque pour  $N \geq 1$ , on a  $-\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} < \frac{3}{2}-\frac{2}{3^N}$ .

Ainsi, la majoration effectuée est-elle cette fois trop forte ...

Nous reprenons l'approche en menant une récurrence forte.

Nous considérons donc la propriété  $\mathcal{P}_n$  : « la fonction  $f$  n'est pas dérivable en  $a_n$  ».

Nous avons montré que  $\mathcal{P}_0$  était vraie.

Soit alors  $N$  un entier naturel non nul quelconque fixé.

On suppose que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  strictement inférieur à  $N$ .

On introduit alors les ensembles suivants :

- $I_N = \{n < N / a_n < a_N\}$
- $E_N = \{n < N / a_n = a_N\}$
- $S_N = \{n < N / a_n > a_N\}$

Si  $E_N \neq \emptyset$  alors, d'après l'hypothèse de récurrence, la non dérivabilité en  $a_N$  est acquise pour un  $a_n = a_N$  avec  $n < N$ .

On suppose donc désormais  $E_N = \emptyset$ .

Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(a_N + h) - f(a_N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} \\ &= \sum_{n \in I_N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} + \sum_{n \in S_N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} \\ &\quad + \frac{|h|}{3^N} + \sum_{n > N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} \end{aligned}$$

Pour  $|h|$  suffisamment petit, on a :

- $\forall n \in I_N, a_N + h - a_n > 0$  et donc :

$$\sum_{n \in I_N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} = \sum_{n \in I_N} \frac{h}{3^n} = h \sum_{n \in I_N} \frac{1}{3^n} = h \times S(I_N) \text{ où } S(I_N) = \sum_{n \in I_N} \frac{1}{3^n}$$

- $\forall n \in S_N, a_N + h - a_n < 0$  et donc :

$$\sum_{n \in S_N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} = - \sum_{n \in S_N} \frac{h}{3^n} = -h \sum_{n \in S_N} \frac{1}{3^n} = -h \times S(S_N) \text{ où } S(S_N) = \sum_{n \in S_N} \frac{1}{3^n}$$

D'où :

$$f(a_N + h) - f(a_N) = h \times S(I_N) - h \times S(S_N) + \frac{|h|}{3^N} + \sum_{n > N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \left| f(a_N + h) - f(a_N) - h \times S(I_N) + h \times S(S_N) - \frac{|h|}{3^N} \right| &= \left| \sum_{n > N} \frac{|a_N + h - a_n| - |a_N - a_n|}{3^n} \right| \\ &\leq \sum_{n > N} \frac{|h|}{3^n} \\ &= |h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N) \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} -|h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N) \right) &\leq f(a_N + h) - f(a_N) - h \times S(I_N) + h \times S(S_N) - \frac{|h|}{3^N} \\ &\leq |h| \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N) \right) \end{aligned}$$

Pour  $h > 0$  :

$$\begin{aligned} -h\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N)\right) &\leq f(a_N + h) - f(a_N) - h \times S(I_N) + h \times S(S_N) - \frac{h}{3^N} \\ &\leq h\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$-\frac{3}{2} + \frac{1}{3^N} + S(I_N) + S(S_N) \leq \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} - S(I_N) + S(S_N) - \frac{1}{3^N} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N)$$

Puis :

$$-\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} + 2S(I_N) \leq \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} \leq \frac{3}{2} - 2S(S_N)$$

En passant à la limite, on a finalement :  $-\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} + 2S(I_N) \leq f'_d(a_N) \leq \frac{3}{2} - 2S(S_N)$ .

Pour  $h < 0$  :

$$\begin{aligned} h\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N)\right) &\leq f(a_N + h) - f(a_N) - h \times S(I_N) + h \times S(S_N) + \frac{h}{3^N} \\ &\leq -h\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N)\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3^N} - S(I_N) - S(S_N) \geq \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} - S(I_N) + S(S_N) + \frac{1}{3^N} \geq -\frac{3}{2} + \frac{1}{3^N} + S(I_N) + S(S_N)$$

Puis :

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3^N} - 2S(S_N) \geq \frac{f(a_N + h) - f(a_N)}{h} \geq -\frac{3}{2} + 2S(I_N)$$

En passant à la limite, on a finalement :  $-\frac{3}{2} + 2S(I_N) \leq f'_g(a_N) \leq \frac{3}{2} - \frac{2}{3^N} - 2S(S_N)$ .

On a :

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} + 2S(I_N) - \left[ \frac{3}{2} - \frac{2}{3^N} - 2S(S_N) \right] &= -3 + \frac{4}{3^N} + 2[S(I_N) + S(S_N)] \\ &= -3 + \frac{4}{3^N} + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{3^n} \\ &= -3 + \frac{4}{3^N} + 2 \times \frac{3}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{3^N} \right) \\ &= -3 + \frac{4}{3^N} + 3 - \frac{3}{3^N} \\ &= \frac{1}{3^N} > 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$-\frac{3}{2} + 2S(I_N) \leq f_g'(a_N) \leq \frac{3}{2} - \frac{2}{3^N} - 2S(S_N) < -\frac{3}{2} + \frac{2}{3^N} + 2S(I_N) \leq f_d'(a_N) \leq \frac{3}{2} - 2S(S_N)$$

Finalement :  $f_g'(a_N) < f_d'(a_N)$  et la fonction  $f_n$  n'est pas dérivable en  $a_N$ . La propriété  $\mathcal{P}_N$  est vraie.

Ainsi la propriété  $\mathcal{P}_n$  est héréditaire et on en déduit finalement qu'elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $f_n$  n'est pas dérivable en  $a_n$ .

A titre de complément, soulignons qu'on dispose ainsi potentiellement d'une fonction convexe non dérivable en un nombre dénombrable de points.