Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Soit A une partie de E et B une partie de F.

Montrer que l'on a : $f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)=f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}$.

Analyse

Encore un exercice classique qui est un très bon entraînement pour maîtriser la notion d'image réciproque.

Résolution

Pour toutes parties X et Y de E, on a : $f(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})\subset f(\mathrm{X})\cap f(\mathrm{Y})$.
Il vient donc : $f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)\subset f(\mathrm{A})\cap f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right)$.

On a l'inclusion classique pour toute partie B de F : $f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right)\subset\mathrm{B}$.
On en tire : $f(\mathrm{A})\cap f\left(f^{-1}(\mathrm{B})\right)\subset f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}$.

Les deux inclusions que nous venons d'obtenir donnent : $\boxed{f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)\subset f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}}$

Remarque : cette inclusion peut également être facilement obtenue en considérant un élément y de $f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)$ et en montrant qu'il appartient à $f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}$.

Pour montrer l'inclusion inverse, nous considérons un élément y de $f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}$.
En tant qu'élément de $f(\mathrm{A})$, nous pouvons affirmer qu'il existe un élément x de A tel que $y=f(x)$.
Mais y est aussi un élément de B. De fait, $y=f(x)\in\mathrm{B}$ entraîne que x appartient à $f^{-1}(\mathrm{B})$.
Finalement on a : $x\in\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})$ et donc : $y=f(x)\in f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)$.
On a donc la deuxième inclusion : $\boxed{f(\mathrm{A})\cap\mathrm{B}\subset f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)}$

Les deux inclusions donnent l'égalité cherchée.

Résultat final

Si f est une application d'une ensemble E dans un ensemble F et si A et B sont des parties respectivement de E et F alors on a :

$$f(\mathrm{A})\cap \mathrm{B} = f\left(\mathrm{A}\cap f^{-1}(\mathrm{B})\right)$$