Soit E, F et G trois ensembles.
Soit $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ et $g:\mathrm{E}\to\mathrm{G}$ deux applications.

On définit l'application :

$$h:\begin{cases} E\to F\times G \\ x\mapsto h(x)=\left(f(x),g(x)\right)\end{cases}$$

1. Montrer que si *f* ou *g* est injective alors *h* est injective.
2. Etudier la réciproque.
3. Montrer que si *h* est surjective alors *f* et *g* sont surjectives.
4. Etudier la réciproque.

Analyse

Un exercice classique où l'on construit une application *h* à valeurs dans un ensemble produit à partir de deux applications, *f* et *g*, à valeurs dans chacune des composantes. On cherche à établir des liens entre l'injectivité (respectivement la surjectivité) de *h* et celle de *f* et/ou *g*.

Résolution

Question 1.

On peut, sans faire perdre de la généralité à la démarche, supposer *f* injective.

On a alors, pour tout *x* et tout x' de E :

$$h(x)=h(x')\Leftrightarrow\left(f(x),g(x)\right)=\left(f(x'),g(x')\right)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=f(x')\\ g(x)=g(x')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\ g(x)=g(x')\end{cases}\Leftrightarrow x=x'$$

Ainsi, l'application *h* est injective.

$$\boxed{f \text{ ou } g \text{ injective } \Rightarrow\ h \text{ injective}}$$

Question 2.

L'injectivité de *h* n'entraîne pas, dans le cas général, celle de *f* ou de *g*.

Il suffit, par exemple de considérer $\mathrm{E}=[0\,;2\pi]$, $\mathrm{F}=\mathrm{G}=[-1\,;1]$ et l'application *h* définie par : $h(x)=(\sin x,\cos x)$.
Elle est bien injective (on a classiquement ; $(\sin x=\sin y \text{ et } \cos x=\cos y)\Leftrightarrow x=y$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$) mais ni *f* ni *g* ne le sont. Par exemple, pour une valeur donnée *a* dans l'intervalle $[-1\,;1]$, il existe deux valeurs α et β dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ telle que $\cos\alpha=\cos\beta=a$.

$$\boxed{h \text{ injective} \not\Rightarrow f \text{ ou } g \text{ injective}}$$

Question 3.

On suppose maintenant *h* surjective.

Pour tout couple (y,y') dans $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$, il existe *x* dans E tel que $(y,y')=h(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\exists x\in\mathrm{E}\,/\,(y,y')=h(x)\\
\Leftrightarrow\ &\exists x\in\mathrm{E}\,/\,(y,y')=\big(f(x),g(x)\big)\\
\Leftrightarrow\ &\exists x\in\mathrm{E}\,/\begin{cases} y=f(x)\\ y'=g(x)\end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que *f* et *g* sont surjectives.

$$\boxed{h \text{ surjective} \Rightarrow f \text{ et } g \text{ surjectives}}$$

Question 4.

Le contre-exemple fourni à la question 2 va nous servir ici encore ! En effet, les applications sinus et cosinus sont bien surjectives mais *h* ne l'est pas puisque le couple $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent.

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ surjectives} \not\Rightarrow h \text{ surjective}}$$