

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = 0$.

Montrer que l'on a :

1. $\text{rg } f + \text{rg } f^2 \leq \dim E$.
2. $2 \times \text{rg } f^2 \leq \text{rg } f$ (on considèrera la restriction de f à $\text{Im } f$).

Analyse

Ne pas oublier qu'en dimension finie le théorème du rang s'avère souvent très pratique !

Résolution

Posons $\dim E = n$.

Question 1.

Puisque l'inégalité demandée fait apparaître $\text{rg } f^2$, considérons $\text{Im } f^2$.

Si un vecteur y appartient à $\text{Im } f^2$ alors il existe un vecteur x de E tel que : $y = f^2(x)$.

Il vient alors : $f(y) = f[f^2(x)] = f^3(x) = 0_E$. C'est-à-dire : $y \in \ker f$.

On déduit de ce qui précède :

$$\text{Im } f^2 \subset \ker f$$

Il vient alors : $\dim \text{Im } f^2 \leq \dim \ker f$, soit : $\text{rg } f^2 \leq \dim \ker f$.

D'où : $\text{rg } f + \text{rg } f^2 \leq \text{rg } f + \dim \ker f$.

Or, d'après le théorème du rang, on a : $\text{rg } f + \dim \ker f = \dim E$.

Finalement, on obtient l'inégalité demandée : $\text{rg } f + \text{rg } f^2 \leq \dim E$.

$$\text{rg } f + \text{rg } f^2 \leq \dim E$$

Question 2.

Soit g la restriction de f à $\text{Im } f$.

Le théorème du rang donne :

$$\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \text{rg } g + \dim \ker g \quad (1)$$

On a :

$$\begin{aligned} & y \in \text{Im } g \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \text{Im } f / y = g(x) = f(x) \\ \Leftrightarrow & \exists t \in E / y = f^2(t) \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Im } f^2 \end{aligned}$$

On a donc le résultat (classique !) : $\text{Im } g = \text{Im } f^2$, d'où on tire :

$$\text{rg } g = \text{rg } f^2 \quad (2)$$

Soit maintenant x appartenant à $\text{Im } f^2$. Il existe un vecteur t tel que : $x = f^2(t)$. De fait, x appartient également à $\text{Im } f$ ($x = f^2(t) = f(f(t))$). On en déduit alors :

$f(x) = g(f^2(t)) = f(f^2(t)) = g(f^2(t)) = f^3(t) = 0$. Ainsi, x appartient à $\ker g$ et on a : $\text{Im } f^2 \subset \ker g$. D'où :

$$\text{rg } f^2 \leq \dim \ker g \quad (3)$$

(1) et (2) donnent : $\text{rg } f = \text{rg } f^2 + \dim \ker g$.

(3) se réécrit alors : $\text{rg } f^2 \leq \text{rg } f - \text{rg } f^2$, d'où : $2 \text{rg } f^2 \leq \text{rg } f$.

$$2 \text{rg } f^2 \leq \text{rg } f$$