

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et h une application linéaire de E dans F .

Soit alors f l'application de $E \times F$ dans $E \times F$ définie par :

$$f : E \times F \rightarrow E \times F \\ (x, y) \mapsto f[(x, y)] = (x, y - h(x))$$

Montrer que f est un automorphisme de $E \times F$.

Analyse

L'exercice ne présente pas de difficulté particulière et est une application directe du cours. Pour établir la bijectivité de f , il n'est pas nécessaire d'en établir l'injectivité ...

Résolution

En guise de préambule, rappelons que, E et F étant des \mathbb{K} -espace vectoriels, $E \times F$ se trouve lui-même muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} avec :

- La loi de composition interne définie par :

$$\forall [(x, y), (x', y')] \in (E \times F)^2, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

- La loi de composition externe définie par :

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E \times F, \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Pour tous couples (x, y) et (x', y') dans $E \times F$ et tous scalaires α et α' dans \mathbb{K} , on a, en tenant compte de la linéarité de h :

$$\begin{aligned} f[\alpha(x, y) + \alpha'(x', y')] &= f[(\alpha x + \alpha' x', \alpha y + \alpha' y')] \\ &= (\alpha x + \alpha' x', \alpha y + \alpha' y' - h(\alpha x + \alpha' x')) \\ &= (\alpha x + \alpha' x', \alpha y + \alpha' y' - \alpha h(x) - \alpha' h(x')) \\ &= (\alpha x + \alpha' x', \alpha(y - h(x)) + \alpha'(y' - h(x'))) \\ &= (\alpha x, \alpha(y - h(x))) + (\alpha' x', \alpha'(y' - h(x'))) \\ &= \alpha(x, y - h(x)) + \alpha'(x', y' - h(x')) \\ &= \alpha f[(x, y)] + \alpha' f[(x', y')] \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire.

Étudions maintenant la surjectivité de f .

Soit (X, Y) un élément de $E \times F$.

On cherche s'il existe un couple (x, y) dans $E \times F$ tel que $f[(x, y)] = (X, Y)$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f[(x, y)] &= (X, Y) \\ \Leftrightarrow (x, y - h(x)) &= (X, Y) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y - h(x) = Y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + h(X) \end{cases} \end{aligned}$$

On en conclut que non seulement le couple (x, y) cherché existe mais qu'il est, de surcroît, unique. L'application f est donc bijective.

L'application f étant linéaire et bijective de l'espace vectoriel $E \times F$ dans lui-même, il s'agit donc d'un automorphisme de $E \times F$.