Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p un projecteur de E.

Montrer que :

1. $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E.
2. Comparer les noyaux et les images de p et $\mathrm{Id}_E - p$.

Analyse

Un (très) grand classique (une question de cours diraient certain(e)s ☺) !

Résolution

Question 1.

L'application $\mathrm{Id}_E - p$ est clairement un endomorphisme de E comme différence de deux endomorphismes de E.

On a alors :

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_E - p)\circ(\mathrm{Id}_E - p) &= \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E \circ p - p \circ \mathrm{Id}_E + \underbrace{p \circ p}_{\substack{=p \\ (\text{car } p \text{ est} \\ \text{un projecteur})}} \\ &= \mathrm{Id}_E - p - p + p \\ &= \mathrm{Id}_E - p\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Id}_E - p$ est un endomorphisme de E qui vérifie $(\mathrm{Id}_E - p)\circ(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p$, il s'agit d'un projecteur de E.

$$\boxed{\mathrm{Id}_E - p \text{ est un projecteur de E.}}$$

Question 2.

Soit y un élément quelconque de $\mathrm{Im}\, p$. Il existe donc un vecteur x de E tel que : $y = p(x)$.
Mais alors : $p(y) = p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x) = y$, soit $(\mathrm{Id}_E - p)(y) = 0_E$.
Ainsi, $y \in \ker(\mathrm{Id}_E - p)$ et on en conclut finalement : $\mathrm{Im}\, p \subset \ker(\mathrm{Id}_E - p)$.

Soit maintenant y un élément quelconque de $\ker(\mathrm{Id}_E - p)$.
On a : $(\mathrm{Id}_E - p)(y) = 0_E$, soit $p(y) = y$ et on en déduit immédiatement $y \in \mathrm{Im}\, p$ puis l'inclusion : $\ker(\mathrm{Id}_E - p) \subset \mathrm{Im}\, p$.

La double inclusion nous permet finalement de conclure à l'égalité :

$$\mathrm{Im}\, p = \ker(\mathrm{Id}_E - p)$$

Cette égalité est valable pour tout projecteur de E, en particulier pour le projecteur $\mathrm{Id}_E - p$.
On a donc :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \ker(\mathrm{Id}_E - (\mathrm{Id}_E - p)) = \ker p$$

En définitive, on a :

$$\boxed{\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}\, p \text{ et } \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p}$$

Résultat final

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et p un projecteur de E alors $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur de E et on a :

$$\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}\, p$$
$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$$