Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f et g deux formes linéaires sur E telles que : $\forall x \in \mathrm{E},\ f(x)g(x)=0$

Montrer que $f=0$ ou $g=0$.

Analyse

Un grand classique où le résultat se démontre facilement via un raisonnement par l'absurde.

Résolution

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on a : $f \neq 0$ et $g \neq 0$.
Il existe donc x dans E tel que $f(x) \neq 0$ et y tel que $g(y) \neq 0$.
Comme $f(x)g(x)=0$ et $f(x) \neq 0$, il vient $g(x)=0$.
De façon similaire, comme $f(y)g(y)=0$ et $g(y) \neq 0$, il vient $f(y)=0$.

On considère alors le produit $f(x+y)g(x+y)$.
Par hypothèse sur les formes f et g, ce produit est nul.
Mais on a également :

$$\begin{aligned}
f(x+y)g(x+y) &= [f(x)+f(y)][g(x)+g(y)] \\
&= \underbrace{f(x)g(x)}_{\substack{=0 \\ \text{hypothèse sur } f \text{ et } g}} + f(x)g(y) + \underbrace{f(y)g(x)}_{\substack{g(x)=f(y)=0 \\ \text{(vu précédemment)}}} + \underbrace{f(y)g(y)}_{\substack{=0 \\ \text{hypothèse sur } f \text{ et } g}} \\
&= f(x)g(y)
\end{aligned}$$

Comme $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$, on a $f(x)g(y) \neq 0$ et on aboutit ainsi à une contradiction puisque $f(x+y)g(x+y)=0$! Ainsi, soit f est nulle soit g l'est.

Résultat final

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et f et g deux formes linéaires sur E telles que $\forall x \in \mathrm{E},\ f(x)g(x)=0$ alors f ou g est nulle.