

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et p et q deux projections de E telles que : $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$

1. Montrer que $\varphi = p + q - q \circ p$ est une projection.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\text{Im} \varphi$.

Analyse

La première question ne pose pas de difficulté particulière : on revient à la définition d'une projection. Pour la deuxième question, on revient également aux définitions du noyau et de l'image et on exploite immédiatement le fait que p et q sont des projections. Pour autant, les résultats élégants que l'on obtient découlent fondamentalement de l'hypothèse $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Résolution

Question 1.

L'application φ est linéaire comme somme de trois applications linéaires (p , q et $-q \circ p$).

Pour tout vecteur x de E , on a :

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi)(x) &= \varphi(\varphi(x)) \\ &= \varphi((p + q - q \circ p)(x)) \\ &= \varphi(p(x) - q(x) - (q \circ p)(x)) \\ &= \varphi(p(x)) - \varphi(q(x)) - \varphi((q \circ p)(x))\end{aligned}$$

Il vient alors, en tenant compte de $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (que nous noterons plus simplement 0 dans la suite) :

$$\begin{aligned}\varphi(p(x)) &= (p + q - q \circ p)(p(x)) \\ &= p(p(x)) + q(p(x)) - (q \circ p)(p(x)) \\ &= (p \circ p)(x) + (q \circ p)(x) - (q \circ p \circ p)(x) \\ &= p(x) + (q \circ p)(x) - (q \circ p)(x) \\ &= p(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(q(x)) &= (p+q-q \circ p)(q(x)) \\
&= p(q(x)) + q(q(x)) - (q \circ p)(q(x)) \\
&= (p \circ q)(x) + (q \circ q)(x) - (q \circ p \circ q)(x) \\
&= 0_E + q(x) - q(0_E) \\
&= q(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi((q \circ p)(x)) &= (p+q-q \circ p)((q \circ p)(x)) \\
&= p((q \circ p)(x)) + q((q \circ p)(x)) - (q \circ p)((q \circ p)(x)) \\
&= (p \circ q \circ p)(x) + (q \circ q \circ p)(x) - (q \circ p \circ q \circ p)(x) \\
&= (p \circ q)(p(x)) + (q \circ p)(x) - q[(p \circ q)(p(x))] \\
&= 0_E + (q \circ p)(x) - q(0_E) \\
&= (q \circ p)(x)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$(\varphi \circ \varphi)(x) = p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = \varphi(x)$$

L'application $p+q-q \circ p$ est une projection de E.

Question 2.

Commençons par déterminer $\ker \varphi$.

$$\text{On a : } x \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0_E \Leftrightarrow (p+q-q \circ p)(x) = 0_E \Leftrightarrow p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = 0_E.$$

$$\text{On a alors : } p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = 0_E \Rightarrow p(p(x) + q(x) - (q \circ p)(x)) = p(0_E) = 0_E.$$

Mais :

$$\begin{aligned}
p(p(x) + q(x) - (q \circ p)(x)) &= 0_E \\
\Leftrightarrow (p \circ p)(x) + (p \circ q)(x) - (p \circ q)(p(x)) &= 0_E \\
\Leftrightarrow p(x) &= 0_E
\end{aligned}$$

$$\text{En définitive : } x \in \ker \varphi \Rightarrow p(x) = 0_E.$$

Remarquons que cette première implication découle de l'hypothèse $p \circ q = 0$.

De façon similaire :

$$p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = 0_E \Rightarrow q(p(x) + q(x) - (q \circ p)(x)) = q(0_E) = 0_E$$

Mais :

$$\begin{aligned}q(p(x) + q(x) - (q \circ p)(x)) &= 0_E \\ \Leftrightarrow (q \circ p)(x) + (q \circ q)(x) - (q \circ q \circ p)(x) &= 0_E \\ \Leftrightarrow (q \circ p)(x) + q(x) - (q \circ p)(x) &= 0_E \\ \Leftrightarrow q(x) &= 0_E\end{aligned}$$

En définitive : $x \in \ker \varphi \Rightarrow q(x) = 0_E$.

Cette deuxième implication ne fait pas intervenir l'hypothèse $p \circ q = 0$.

De $x \in \ker \varphi \Rightarrow p(x) = 0_E$ et $x \in \ker \varphi \Rightarrow q(x) = 0_E$ on tire finalement :

$$x \in \ker \varphi \Rightarrow \begin{cases} p(x) = 0_E \\ q(x) = 0_E \end{cases} \Leftrightarrow x \in \ker p \cap \ker q$$

Par ailleurs, on a immédiatement :

$$x \in \ker p \cap \ker q \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) = 0_E \\ q(x) = 0_E \end{cases} \Rightarrow (p + q - q \circ p)(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \ker \varphi$$

Ainsi : $x \in \ker p \cap \ker q \Leftrightarrow x \in \ker \varphi$.

$$\ker \varphi = \ker(p + q - q \circ p) = \ker p \cap \ker q$$

Déterminons maintenant $\text{Im } \varphi$.

Soit y un élément de $\text{Im } \varphi$.

Il existe donc un vecteur x tel que $y = \varphi(x) = (p + q - q \circ p)(x) = p(x) + q(x - p(x))$.

Ainsi, on en déduit immédiatement que y appartient à $\text{Im } p + \text{Im } q$.

Ainsi : $\text{Im } \varphi \subset \text{Im } p + \text{Im } q$.

Soit maintenant y un élément de $\text{Im } p + \text{Im } q$.

Il existe donc deux vecteurs x et x' tels que : $y = p(x) + q(x')$.

On a alors :

$$p(y) = p(p(x) + q(x')) = p(p(x)) + p(q(x')) = (p \circ p)(x) + (p \circ q)(x') = p(x).$$

Et :

$$q(y) = q(p(x) + q(x')) = q(p(x)) + q(q(x')) = (q \circ p)(x) + (q \circ q)(x') = (q \circ p)(x) + q(x')$$

Mais comme $p(y) = p(x)$, on a $(q \circ p)(y) = (q \circ p)(x)$.

Donc : $q(y) = (q \circ p)(x) + q(x') = (q \circ p)(y) + q(x')$.

$p(y) = p(x)$ et $q(y) = (q \circ p)(y) + q(x')$ donnent, en additionnant membre à membre :

$$p(y) + q(y) = (q \circ p)(y) + \underbrace{q(x') + p(x)}_{=y}$$

Finalement : $y = p(y) + q(y) - (q \circ p)(y) = (p + q - q \circ p)(y) = \varphi(y)$.

D'où $y \in \text{Im } \varphi$.

Ainsi : $\text{Im } p + \text{Im } q \subset \text{Im } \varphi$.

Finalement : $\text{Im } \varphi = \text{Im } p + \text{Im } q$.

On peut cependant être plus précis.

En effet, considérons y dans $\text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Il existe donc deux vecteurs x et x' tels que : $y = p(x) = q(x')$.

On en déduit :

- D'une part : $p(y) = p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x) = y$.
- D'autre part : $p(y) = (p \circ q)(x') = 0_E$.

Finalement : $y = 0_E$.

Ainsi $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0_E\}$ et la somme $\text{Im } p + \text{Im } q$ est directe.

$$\text{Im } \varphi = \text{Im } p + \text{Im } q = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$$