

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\ker f = \text{Im } f$
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = \text{Im } f$ et soit F un supplémentaire de $\ker f$.
Montrer que :
 - a) $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
 - b) $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{y}, \vec{z}) \in F^2 / \vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$
 - c) $\exists g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$

Analyse

La première question ne pose pas de difficulté particulière (on peut par exemple procéder par double inclusion). Dans la seconde question, on notera que l'hypothèse de la dimension finie nous garantit l'existence d'un supplémentaire F tel que mentionné. La question 2.a est déterminante pour la 2.b. L'essentiel de la difficulté se trouve dans la question 2.c : on tirera parti de la décomposition obtenue à la question 2.b en associant à \vec{x} le vecteur \vec{z} apparaissant dans sa décomposition...

Résolution

Question 1.

Soit $\vec{x} \in \ker f : f(\vec{x}) = \vec{0}_E$.

D'après la seconde hypothèse : $(f \circ g + g \circ f)(\vec{x}) = \vec{x}$. D'où : $f(g(\vec{x})) + g(f(\vec{x})) = \vec{x}$.

C'est-à-dire : $\vec{x} = f(g(\vec{x}))$ et on en déduit : $\ker f \subset \text{Im } f$.

Soit maintenant $\vec{y} \in \text{Im } f$. Il existe donc $\vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x})$.

Comme $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a : $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$. Or $f^2(\vec{x}) = f(\vec{y})$. On a donc $f(\vec{y}) = \vec{0}_E$, c'est-à-dire $\vec{y} \in \ker f$. On en déduit : $\text{Im } f \subset \ker f$.

De ce qui précède, on tire finalement l'égalité demandée :

$$\text{Im } f = \ker f$$

Question 2.a

Soit $\vec{x} \in E$. Comme $f(\vec{x}) \in \text{Im } f$ et $\text{Im } f = \ker f$, on a immédiatement $f(f(\vec{x})) = \vec{0}_E$, c'est-à-dire : $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Question 2.b

On a : $E = \ker f \oplus F$.

Pour tout $\vec{x} \in E$, il existe donc un unique couple (\vec{x}_1, \vec{x}_2) dans $\ker f \times F$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Comme $\text{Im } f = \ker f$, on peut écrire $\vec{x}_1 = f(\vec{t}_1)$. Comme vecteur de E , \vec{t}_1 peut lui-même être écrit $\vec{t}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec (\vec{u}_1, \vec{u}_2) dans $\ker f \times F$.

D'où : $\vec{x}_1 = f(\vec{t}_1) = f(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f(\vec{u}_1) + f(\vec{u}_2) = f(\vec{u}_2)$ et ainsi : $\vec{x} = f(\vec{u}_2) + \vec{x}_2$ avec \vec{u}_2 et \vec{x}_2 dans F .

L'existence de la décomposition est ainsi établie. Il nous reste à montrer son unicité.

Supposons que l'on ait $\vec{x} = \vec{y}_1 + f(\vec{z}_1) = \vec{y}_2 + f(\vec{z}_2)$ avec $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_1$ et \vec{z}_2 dans F .

On a alors : $\vec{y}_1 - \vec{y}_2 = f(\vec{z}_2) - f(\vec{z}_1) = f(\vec{z}_2 - \vec{z}_1)$.

Comme $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (cf. la question précédente), il vient alors :

$$f(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = f(f(\vec{z}_2 - \vec{z}_1)) = f^2(\vec{z}_2 - \vec{z}_1) = \vec{0}_E$$

On en déduit que $\vec{y}_1 - \vec{y}_2$ appartient à $\ker f$. Mais comme $\vec{y}_1 - \vec{y}_2$ appartient à F , on en déduit finalement que $\vec{y}_1 - \vec{y}_2$ appartient à $\ker f \cap F$. Ces deux sous-espaces de E étant supplémentaires, leur intersection est réduite au vecteur nul et on en déduit $\vec{y}_1 - \vec{y}_2 = \vec{0}_E$, c'est-à-dire $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$.

Il vient alors $f(\vec{z}_1) = f(\vec{z}_2)$ et le même raisonnement nous conduit à $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$.

La décomposition est bien unique.

$$\forall \vec{x} \in E, \exists!(\vec{y}, \vec{z}) \in F^2 / \vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$$

Question 2.c

D'après la question précédente, on peut définir l'endomorphisme g de E qui à tout vecteur \vec{x} associe le vecteur \vec{z} apparaissant dans la décomposition précédente :

$$\forall \vec{x} \in E, g : \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = \vec{z} / \vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z})$$

On a donc : $\vec{x} = \vec{y} + f(g(\vec{x}))$

On aimerait montrer que l'on a : $\vec{y} = g(f(\vec{x}))$.

Pour cela, on s'intéresse à la décomposition (au sens de la question précédente) de $f(\vec{x})$.

On a immédiatement $\vec{x} = \vec{y} + f(\vec{z}) \Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{y} + f(\vec{z})) = f(\vec{y}) + f(f(\vec{z})) = f(\vec{y}) + \vec{0}_E$.

Comme $\vec{0}_E$ et \vec{y} appartiennent à F , nous venons d'obtenir la décomposition de $f(\vec{x})$ et nous avons immédiatement : $g(f(\vec{x})) = \vec{y}$, qui est exactement l'égalité que nous voulions montrer.

Finalement : $\vec{x} = \vec{y} + f(g(\vec{x})) = g(f(\vec{x})) + f(g(\vec{x})) = (g \circ f + f \circ g)(\vec{x})$, soit :

$$g \circ f + f \circ g = \text{Id}_E$$

On a bien :

$$\exists g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f + f \circ g = \text{Id}_E$$