Soit E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f et g deux applications linéaires de E dans F.

Montrer que :

$$\left|\text{rg}\, f - \text{rg}\, g\right| \leq \text{rg}\left(f+g\right) \leq \text{rg}\, f + \text{rg}\, g$$

Analyse

Chaque inégalité découle d'une inclusion entre sous-espaces vectoriels que l'on obtient facilement. On aura remarqué que f et g jouent des rôles symétriques.

Résolution

Soit $\vec{y} \in \text{Im}\left(f+g\right)$.

Par définition, il existe un vecteur $\vec{x}$ de E tel que : $\vec{y} = \left(f+g\right)\left(\vec{x}\right)$.

On en déduit : $\vec{y} = f\left(\vec{x}\right) + g\left(\vec{x}\right)$ et donc : $\text{Im}\left(f+g\right) \subset \text{Im}\, f + \text{Im}\, g$.

D'où, en considérant les dimensions (finies) de ces sous-espaces vectoriels :

$$\text{rg}\left(f+g\right) \leq \text{rg}\, f + \text{rg}\, g \quad (*)$$

En remarquant que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\vec{x}\right) &= f\left(\vec{x}\right) + g\left(\vec{x}\right) - g\left(\vec{x}\right) \\ &= \left(f+g\right)\left(\vec{x}\right) - g\left(\vec{x}\right) \\ &= \left(f+g\right)\left(\vec{x}\right) + g\left(-\vec{x}\right) \end{aligned}$$

il vient : $\text{Im}\, f \subset \text{Im}\left(f+g\right) + \text{Im}\, g$ et donc : $\text{rg}\, f \leq \text{rg}\left(f+g\right) + \text{rg}\, g$ puis
$\text{rg}\, f - \text{rg}\, g \leq \text{rg}\left(f+g\right)$ (1).

Les applications linéaires f et g jouant des rôles symétriques, on déduit immédiatement du résultat précédent l'inégalité suivante : $\text{rg}\, g - \text{rg}\, f \leq \text{rg}\left(f+g\right)$ (2).

Enfin, les inégalités (1) et (2) nous donnent immédiatement : $\left|\text{rg}\, f - \text{rg}\, g\right| \leq \text{rg}\left(f+g\right)$ (**).

(*) et (**) nous donnent la double inégalité demandée.