Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et soit u un endomorphisme non nul de E.
On suppose que l'on a :

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{E}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} / u(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$$

Montrer que u est une homothétie de E.

Analyse

Notons d'abord qu'il convient de montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{K} / \forall \vec{x} \in \mathrm{E}, u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.

Remarquons ensuite que, u n'étant pas nul, l'espace vectoriel E n'est pas réduit au vecteur nul. On va donc considérer dans un premier temps un vecteur $\vec{x}$ non nul de E et s'intéresser à $\mathrm{Vect}(\vec{x})$… Dans un deuxième temps, on considèrera un <u>éventuel</u> vecteur $\vec{y}$ non colinéaire à $\vec{x}$…

Résolution

Soit $\vec{x}$ un vecteur non nul de E.
Par hypothèse, il existe un scalaire λ_x tel que $u(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$.

Soit alors $\vec{y}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Vect}(\vec{x})$. Il existe donc un scalaire non nul α tel que $\vec{y} = \alpha \vec{x}$ et il vient : $u(\vec{y}) = u(\alpha \vec{x}) = \alpha u(\vec{x}) = \alpha \lambda_x \vec{x}$.

Mais par hypothèse, il existe un scalaire λ_y tel que $u(\vec{y}) = \lambda_y \vec{y}$. D'où : $u(\vec{y}) = \lambda_y \alpha \vec{x}$.

On a ainsi : $u(\vec{y}) = \alpha \lambda_x \vec{x} = \lambda_y \alpha \vec{x}$ et donc $\alpha(\lambda_x - \lambda_y)\vec{x} = \vec{0}$.

Comme le scalaire α est non nul et le vecteur $\vec{x}$ est différent du vecteur nul, il vient finalement $\lambda_x = \lambda_y$.

En notant $\lambda_x = \lambda$, on a le résultat : $\forall \vec{x} \in \mathrm{Vect}(\vec{x}), u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ (l'égalité est trivialement vraie pour le vecteur nul).

Si $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\vec{x})$, on a terminé.

Remarquons que l'on a en fait montré que la restriction de u à toute droite vectorielle est une homothétie.

Supposons maintenant $\mathrm{E} \neq \mathrm{Vect}(\vec{x})$ et considérons un vecteur non nul $\vec{y}$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(\vec{x})$. Pour établir le résultat, il nous suffit de montrer que l'on a : $u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}$.

Soit un vecteur $\vec{z} \in \mathrm{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$ tel que $\vec{z} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y}$ avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
On a par hypothèse et linéarité de u : d'une part, $u(\vec{z}) = \lambda_z \vec{z} = \lambda_z (\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \lambda_z \vec{x} + \beta \lambda_z \vec{y}$ et, d'autre part, $u(\vec{z}) = u(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha u(\vec{x}) + \beta u(\vec{y}) = \alpha \lambda \vec{x} + \beta \lambda_y \vec{y}$.
On a donc : $u(\vec{z}) = \alpha \lambda_z \vec{x} + \beta \lambda_z \vec{y} = \alpha \lambda \vec{x} + \beta \lambda_y \vec{y}$ et donc : $\alpha(\lambda_z - \lambda)\vec{x} + \beta(\lambda_z - \lambda_y)\vec{y} = \vec{0}$.
La famille $(\vec{x}, \vec{y})$ étant libre, on en tire $\alpha(\lambda_z - \lambda) = \beta(\lambda_z - \lambda_y) = 0$. Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, il vient alors : $\lambda_z - \lambda = \lambda_z - \lambda_y = 0$, soit : $\lambda = \lambda_z = \lambda_y$.
On a donc : $u(\vec{y}) = \lambda \vec{y}$. Le résultat est établi.

Résultat final

Si E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et si u est un endomorphisme non nul de E tel que $\forall \vec{x} \in \mathrm{E}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} / u(\vec{x}) = \lambda_x \vec{x}$ alors u est une homothétie de E.