

Soit  $A$  et  $B$  deux parties non vides et bornées de  $\mathbb{R}$ .

1. Dans cette question, on suppose que l'on a :  $A \subset B$ .  
Montrer que l'on a :  $\sup A \leq \sup B$ .
2. Montrer que la partie  $A \cup B$  est majorée et déterminer  $\sup(A \cup B)$ .

---

### Analyse

Dans cet exercice, on utilise fondamentalement le fait que la borne supérieure d'une partie non vide majorée est son plus petit majorant.

---

### Résolution

#### Question 1.

Pour tout élément  $y$  de  $B$  on a,  $\sup B$  étant un majorant de cette partie :  $y \leq \sup B$ .

Soit alors  $x$  un élément quelconque de  $A$ . Comme la partie  $A$  est incluse dans la partie  $B$ , le réel  $x$  est un élément de  $B$  et on a, d'après ce qui précède :  $x \leq \sup B$ .

Le réel  $\sup B$  est donc un majorant de  $A$ .  $\sup A$  étant le plus petit majorant de  $A$ , on en tire immédiatement :  $\sup A \leq \sup B$ .

Le résultat est ainsi établi.

$A$  et  $B$  étant deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

#### Question 2.

Soit  $x$  un élément quelconque de  $A \cup B$ . Soit  $x$  appartient à  $A$  et on a  $x \leq \sup A$  ; soit  $x$  appartient à  $B$  et on a  $x \leq \sup B$ . Dans tous les cas, on a :  $x \leq \max(\sup A ; \sup B)$ .

On déduit de ce qui précède que la partie  $A \cup B$  est majorée (par  $\max(\sup A ; \sup B)$ ).

$\max(\sup A ; \sup B)$  étant un majorant de  $A \cup B$ , on a immédiatement :

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A ; \sup B)$$

D'après la première question, on a :

$$A \subset (A \cup B) \Rightarrow \sup A \leq \sup(A \cup B)$$

$$B \subset (A \cup B) \Rightarrow \sup B \leq \sup(A \cup B)$$

On en déduit :  $\max(\sup A ; \sup B) \leq \sup(A \cup B)$ .

Les deux inégalités nous permettent de conclure :  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A ; \sup B)$ .

A et B étant deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A ; \sup B)$$