

Soit A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} .

On pose $C = A + B = \{x + y / x \in A \text{ et } y \in B\}$

Montrer que $\sup C = \sup A + \sup B$

Analyse

On commence par montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de la partie $A + B$ puis on utilise fondamentalement, d'une façon ou d'une autre, le fait que la borne supérieure d'une partie non vide majorée est son plus petit majorant.

Résolution

Notons d'abord que la partie C est non vide puisque les parties A et B le sont.

Posons $M = \sup A + \sup B$.

Pour tout élément x de A on a, $\sup A$ étant un majorant de cette partie : $x \leq \sup A$.

Pour tout élément y de B on a, $\sup B$ étant un majorant de cette partie : $y \leq \sup B$.

On en déduit :

$$\forall (x, y) \in A \times B, x + y \leq \sup A + \sup B$$

Le réel M est donc un majorant de la partie C et on a : $\sup C \leq M$.

Pour établir l'égalité, nous fournissons deux approches :

1^{ère} approche : retour à la définition de la borne supérieure

On se donne $\varepsilon > 0$ fixé.

$\sup A$ étant le plus petit majorant de A , il existe un réel x_ε dans A strictement supérieur à

$\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \leq \sup A \quad (1)$$

De façon analogue, $\sup B$ étant le plus petit majorant de B , il existe un réel y_ε dans B strictement supérieur à $\sup B - \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < y_\varepsilon \leq \sup B \quad (2)$$

En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient :

$$\sup A + \sup B - \varepsilon < x_\varepsilon + y_\varepsilon \leq \sup A + \sup B$$

On en déduit ainsi qu'il n'existe pas de majorant de C strictement plus petit que M . D'où :

$$\sup C = \sup(A + B) = M = \sup A + \sup B$$

2^{ème} approche : par l'absurde

On suppose que l'on a : $\sup C < M$.

Posons alors : $d = M - \sup C$.

$\sup A$ étant le plus petit majorant de A , il existe un réel x_0 dans A strictement supérieur à $\sup A - \frac{2d}{3}$:

$$\sup A - \frac{d}{3} < x_0 \leq \sup A \quad (1)$$

De façon analogue, $\sup B$ étant le plus petit majorant de B , il existe un réel y_0 dans B strictement supérieur à $\sup B - \frac{2d}{3}$:

$$\sup B - \frac{d}{3} < y_0 \leq \sup B \quad (2)$$

En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient :

$$\sup A + \sup B - \frac{2d}{3} < x_0 + y_0 \leq \sup A + \sup B$$

D'où :

$$\sup A + \sup B - \frac{2d}{3} < x_0 + y_0 \leq \sup A + \sup B$$

$$\text{Mais } \sup A + \sup B - \frac{2d}{3} = M - \frac{2d}{3} = M - \frac{2(M - \sup C)}{3} = \frac{1}{3}M + \frac{2}{3}\sup C.$$

Comme $\sup C < M$, il vient : $\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}\sup C > \sup C$.

On a donc : $\sup C < \sup A + \sup B - \frac{2d}{3} < x_0 + y_0 \leq \sup A + \sup B$.

Inégalité absurde l'élément $x_0 + y_0$ de C ne pouvant être strictement supérieur au majorant de cette partie.

On a bien $\sup C = M$.

Résultat final

Si A et B sont deux parties non vides majorées de \mathbb{R} alors on a :

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

où $A + B = \{x + y / x \in A \text{ et } y \in B\}$.