Soit f un endomorphisme de corps de $(\mathbb{R},+,\times)$.

1. Montrer que pour tout x rationnel, on a $f(x)=x$.
2. Montrer que f est croissante.
3. Montrer que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Analyse

L'exercice permet d'établir un résultat général à connaître. La démarche est classique et fait appel à la densité des rationnels dans l'ensemble des réels.

Résolution

Question 1.

Puisque f est un morphisme de corps, on a : $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

On montre facilement par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $f(n)=n$ (pour l'hérédité, on utilise : $f(n+1)=f(n)+f(1)=f(n)+1$).

On a ensuite : $f(0)=0=f[1+(-1)]=f(1)+f(-1)=1+f(-1)$, d'où $f(-1)=-1$.
Pour tout n entier négatif, on a alors :

$$f(n)=f(-|n|)=f(-1\times|n|)=f(-1)\times f(|n|)=-1\times|n|=-|n|=n$$

En définitive, <u>pour tout entier n</u>, on a : $f(n)=n$.

Soit maintenant un entier n <u>non nul</u>. On a :

$$f(1)=1=f\left(n\times\frac{1}{n}\right)=f(n)\times f\left(\frac{1}{n}\right)=n\times f\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit immédiatement : $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$.

Soit enfin $x = \frac{p}{q}$ un rationnel. On a :

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = f(p) \times f\left(\frac{1}{q}\right) = p \times \frac{1}{q} = \frac{p}{q} = x$$

Finalement :

Si f est un endomorphisme de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ alors :

$\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.

Question 2.

Pour tout <u>x réel positif</u>, on a :

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}^2\right) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 \geq 0$$

Soit alors deux réels x et y tels que $x \leq y$.
On a : $y - x \geq 0$, d'où, d'après ce qui précède : $f(y-x) = f(y) - f(x) \geq 0$. Soit : $f(x) \leq f(y)$.
L'application f est bien croissante.

Si f est un endomorphisme de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ alors f est croissante.

Question 3.

Nous allons utiliser ici la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

D'après la première question, nous avons déjà : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
Soit alors $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$.
Nous allons raisonner par l'absurde en supposant $f(x) \neq x$, par exemple $f(x) > x$ (le raisonnement qui suit serait tout à fait similaire en supposant $f(x) < x$).

On considère alors l'intervalle $\mathrm{I} = \left]x\,;\, f(x)\right[$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel q dans I. On a donc : $f(x) > q > x$.
Comme $q > x$, que $f(q) = q$ et que l'application f est croissante, on a : $f(q) = q \geq f(x)$.
Il en résulte : $f(x) > q \geq f(x)$ d'où $f(x) > f(x)$, ce qui est absurde.
Ainsi, on a : $f(x) = x$.

Si f est un endomorphisme de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

On a la réciproque puisque l'identité de $\mathbb{R}$ est clairement un morphisme de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Résultat final

Le seul endomorphisme de corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$ est l'identité.