1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

   Montrer que l'on a :

$$\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+1}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+2}{b}\right)+\ldots+\mathrm{E}\left(\frac{a+b-1}{b}\right)=a$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

   Montrer que l'on a :

$$\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+1}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+2}{b}\right)+\ldots+\mathrm{E}\left(\frac{a+b-1}{b}\right)=\mathrm{E}(a)$$

Rappel : « E » désigne la fonction partie entière.

Analyse

La première question permet de mettre en place l'outil principal requis dans cette exercice : la division euclidienne ! Dans la deuxième question, la fonction partie entière permet d'adopter une démarche très proche de celle adoptée dans la question 1.

Résolution

Question 1.

La division euclidienne de a par b s'écrit : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

On a donc : $\frac{a}{b} = \frac{bq+r}{b} = q + \frac{r}{b}$ avec $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ et il vient : $\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right) = q$.

Plus généralement, on s'intéresse à $\frac{a+k}{b}$ avec $k \in [\![0\,; b-1]\!]$.

Comme $a = bq + r$, on a : $a + k = bq + k + r$. On doit alors distinguer deux cas :

- Si $k + r < b$, soit $k < b - r$, alors $a + k = bq + k + r$ est la division euclidienne de $a + k$ par b et on a : $\frac{a+k}{b} = \frac{bq+k+r}{b} = q + \frac{k+r}{b}$ avec $0 \leq \frac{k+r}{b} < 1$. D'où : $\mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right) = q$.

- Si $k+r \geq b$, soit $k \geq b-r$, alors $a+k=b(q+1)+k+r-b$ est la division euclidienne de $a+k$ par b (on a $k \geq b-r$ et $k+r<2b$ soit : $b \leq k+r<2b$. D'où : $0 \leq k+r-b<b$) et on a : $\dfrac{a+k}{b}=\dfrac{b(q+1)+k+r-b}{b}=q+1+\dfrac{k+r-b}{b}$ avec $0 \leq \dfrac{k+r-b}{b}<1$. D'où : $\mathrm{E}\left(\dfrac{a+k}{b}\right)=q+1$.

On tire de ce qui précède :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+1}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+2}{b}\right)+\ldots+\mathrm{E}\left(\frac{a+b-1}{b}\right) &= \sum_{k=0}^{b-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{b-r-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right)}_{b-r \text{ termes égaux à } q} + \underbrace{\sum_{k=b-r}^{b-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right)}_{r \text{ termes égaux à } q+1} \\
&= (b-r)\times q + r\times(q+1) \\
&= bq \cancel{-rq} \cancel{+rq} + r \\
&= bq+r \\
&= a
\end{aligned}
$$

Le résultat est ainsi établi.

$$
\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+1}{b}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{a+2}{b}\right)+\ldots+\mathrm{E}\left(\frac{a+b-1}{b}\right)=a}
$$

Question 2.

Nous considérons maintenant a un réel non entier : $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Sous cette hypothèse, on a : $\mathrm{E}(a)<a<\mathrm{E}(a)+1$. On peut donc écrire : $a=\mathrm{E}(a)+\varepsilon$ où $\varepsilon \in]0;1[$.

La division euclidienne de $\mathrm{E}(a)$ par b s'écrit : $\mathrm{E}(a)=bq+r$ avec $0 \leq r<b$.

On a donc $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\mathrm{E}(a)+\varepsilon}{b}=\dfrac{bq+r+\varepsilon}{b}=q+\dfrac{r+\varepsilon}{b}$.

Comme $0 \leq r<b$ et $0<\varepsilon<1$, on a : $0<r+\varepsilon<b$ et donc $0<\dfrac{r+\varepsilon}{b}<1$.

Finalement : $\mathrm{E}\left(\dfrac{a}{b}\right)=\mathrm{E}\left(q+\dfrac{r+\varepsilon}{b}\right)=q$.

Plus généralement, on s'intéresse ici encore à $\dfrac{a+k}{b}$ avec $k \in [\![0;b-1]\!]$.

On a cette fois : $a = bq + r + \varepsilon$ et : $a + k = bq + k + r + \varepsilon$. On doit encore distinguer deux cas, la présence de ε ne changeant que « peu » les choses :

- Si $k + r < b$, soit $k < b - r$, alors $\mathrm{E}(a+k) = \mathrm{E}(a) + k = bq + k + r$ est la division euclidienne de $\mathrm{E}(a+k)$ par b et on a : $\frac{a+k}{b} = \frac{bq+k+r+\varepsilon}{b} = q + \frac{k+r+\varepsilon}{b}$ avec $0 < \frac{k+r+\varepsilon}{b} < 1$. D'où : $\mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right) = q$.
- Si $k + r \geq b$, soit $k \geq b - r$, alors $\mathrm{E}(a+k) = \mathrm{E}(a) + k = b(q+1) + k + r - b + \varepsilon$ est la division euclidienne de $\mathrm{E}(a+k)$ par b (on a $k \geq b - r$ et $k + r < 2b$ soit : $b \leq k + r < 2b$. D'où : $0 \leq k + r - b < b$. Comme $0 < \varepsilon < 1$, il vient finalement : $0 < k + r - b + \varepsilon < b$) et on a : $\frac{a+k}{b} = \frac{b(q+1)+k+r-b+\varepsilon}{b} = q + 1 + \frac{k+r-b+\varepsilon}{b}$ avec $0 \leq \frac{k+r-b+\varepsilon}{b} < 1$. D'où : $\mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right) = q + 1$.

On tire de ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{a+1}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{a+2}{b}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(\frac{a+b-1}{b}\right) &= \sum_{k=0}^{b-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right) \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{b-r-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right)}_{b-r \text{ termes égaux à } q} + \underbrace{\sum_{k=b-r}^{b-1} \mathrm{E}\left(\frac{a+k}{b}\right)}_{r \text{ termes égaux à } q+1} \\
&= (b-r) \times q + r \times (q+1) \\
&= bq \cancel{-rq} \cancel{+rq} + r \\
&= bq + r \\
&= \mathrm{E}(a)
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{a+1}{b}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{a+2}{b}\right) + \ldots + \mathrm{E}\left(\frac{a+b-1}{b}\right) = \mathrm{E}(a)}$$