Montrer que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel.

Analyse

On procède classiquement par l'absurde…

Résolution

Supposons que $\sqrt{5}$ soit rationnel.

On peut alors écrire : $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et *p* et *q* premiers entre eux.

On a immédiatement : $\sqrt{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 5q^2$. Ainsi, 5 divise p^2.

Montrons alors que 5 divise *p*.

Si 5 ne divise pas *p* alors le reste de la division euclidienne de *p* par 5 est égal à 1, 2, 3 ou 4.
Ainsi, $p \equiv a\,(5)$ avec $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- $p \equiv 1\,(5) \Rightarrow p^2 \equiv 1\,(5)$ et 5 ne divise pas p^2.
- $p \equiv 2\,(5) \Rightarrow p^2 \equiv 4\,(5)$ et 5 ne divise pas p^2.
- $p \equiv 3\,(5) \Rightarrow p^2 \equiv 9\,(5) \Rightarrow p^2 \equiv 4\,(5)$ et 5 ne divise pas p^2.
- $p \equiv 4\,(5) \Rightarrow p^2 \equiv 16\,(5) \Rightarrow p^2 \equiv 1\,(5)$ et 5 ne divise pas p^2.

Finalement : $5 \nmid p \Rightarrow 5 \nmid p^2$ et on en déduit, par contraposée : $5 \mid p^2 \Rightarrow 5 \mid p$.

Comme 5 divise *p*, on peut écrire : $p = 5k$.

Il vient alors : $p^2 = 5q^2 \Leftrightarrow (5k)^2 = 5q^2 \Leftrightarrow 25k^2 = 5q^2 \Leftrightarrow 5k^2 = q^2$.

Ainsi, 5 divise q^2 et on en déduit, comme précédemment, que 5 divise *q*.

5 divisant *p* et *q*, ces deux entiers ne sont pas premiers entre eux, ce qui contredit notre hypothèse initiale.

Ainsi, le réel ne peut être écrit sous forme d'une fraction irréductible de deux entiers. Il s'agit d'un irrationnel.

Résultat final

$\sqrt{5}$ n’est pas un rationnel.