Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x)$$

où E désigne la fonction partie entière.

Analyse

Le résultat est évident lorsque x est un entier. On peut donc immédiatement supposer $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Ensuite on peut s'inspirer de l'encadrement : $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x)+1$ sachant que nous devons nous intéresser au réel nx.

Résolution

Soit x un réel quelconque et n un entier naturel non nul.
On a : $x-1 < \mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x)+1$ et donc : $n(x-1) < n\mathrm{E}(x) \leq nx < n(\mathrm{E}(x)+1)$.

Comme $n\mathrm{E}(x)$ est un entier inférieur à nx, il vient immédiatement : $n\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(nx)$.

Par ailleurs, comme $n(\mathrm{E}(x)+1)$ est un entier supérieur à nx, il vient :
$\mathrm{E}(nx)+1 \leq n(\mathrm{E}(x)+1)$ et on a alors : $n\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(nx) \leq nx < \mathrm{E}(nx)+1 \leq n(\mathrm{E}(x)+1)$.

On en déduit, en divisant par n : $\mathrm{E}(x) \leq \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} < \mathrm{E}(x)+1$.

D'où le résultat cherché.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x)$$